

## بررسی شکست ذرات مصالح سنگ‌ریزه‌ای در آزمایش سه محوری

\* عطا آقایی آرای: مرکز تحقیقات راه، مسکن و شهرسازی

عباس سروش: دانشگاه صنعتی امیرکبیر

سعید هاشمی طباطبایی: مرکز تحقیقات راه، مسکن و شهرسازی

دکتر عباس قلندرزاده: دانشگاه تهران، دانشکده فنی

پذیرش ۹۱/۴/۱۱

تاریخ: دریافت ۹۰/۷/۱۸

### چکیده

در همه مصالح سنگ‌ریزه‌ای بر اثر تنش‌های اعمالی زیاد، دانه‌ها شکسته می‌شوند. شکست دانه‌ها و خرد شدن آن‌ها به دانه‌های کوچک‌تر باعث کاهش مقاومت برشی و افزایش تغییر شکل می‌شود. معمولاً شکست دانه‌ها که در آزمایش‌های سه‌محوری مشاهده می‌شود را با شاخص شکست مارسال،  $B_g$ ، بیان می‌کنند. در این مقاله روشی برای محاسبه  $B_g$  در هر سطح از کرنش محوری در آزمایش‌های سه‌محوری ارائه می‌گردد. بدین منظور از اصل مینیمم انرژی Rowe استفاده می‌شود. پارامتر کلیدی در روش یاد شده برای محاسبه  $B_g$ ، مقدار  $\phi_f$ ، زاویه اصطکاک مصالح بدون در نظر گرفتن اتساع و شکست ذرات است. بررسی‌ها و آزمایش‌های صورت گرفته نشان داد که  $\phi_f$ ، زاویه اصطکاک مصالح سنگ‌ریزه‌ای در تنش‌های محدود کننده مؤثر کم‌تر از ۲۰۰ kPa به شرط ایجاد شرایط حجم ثابت و در کرنش نظیر حالت حجم ثابت است. همچنین تغییرات نسبت انرژی شکست و فاکتور شکست مارسال با تنش محدودکننده در کرنش نظیر گسیختگی با رابطه خطی قابل ارائه است.

واژه‌های کلیدی: مصالح سنگ‌ریزه‌ای، شکست دانه‌ها، سه‌محوری

[aghaeiaraei@bhrc.ac.ir](mailto:aghaeiaraei@bhrc.ac.ir)

\* نویسنده مسئول

## مقدمه

خرد شدن اجزا تشکیل‌دهنده مصالح سنگ‌ریزه‌ای در اثر تنش‌های وارده، از مهم‌ترین پدیده‌هایی است که در این مصالح رخ می‌دهد. شکست دانه‌ها چه در سطح تنش‌های زیاد [۳]، [۴]، [۵]، [۸]، [۱۱] و چه تنش‌های محدودکننده کم [۹]، [۱۶] رخ می‌دهد. شکست دانه‌ها و خرد شدن آن‌ها به دانه‌های کوچک‌تر باعث کاهش مقاومت برشی (به‌علت کاهش اتساع نمونه در شرایط زه‌کشی شده) و افزایش تغییرشکل‌پذیری می‌شود [۱۰]، [۱۵]، [۲۰]، [۲۵]. در کل شکست دانه‌ها سبب تراکم حجمی در آزمایش زه‌کشی شده و ایجاد فشار آب حفره‌ای در آزمایش زه‌کشی نشده می‌شود [۱۹].

بر اساس نتایج بررسی‌های انجام شده مقدار شکست دانه‌ها در مصالح تیزگوشه به‌علت ایجاد تمرکز تنش در گوشه‌های تیز بیش‌تر از مقادیر نظیر مصالح گردگوشه است. ضمناً با افزایش اندازه دانه مقادیر شاخص شکست به‌علت نیروی تماس بزرگ‌تر در مرز تماس دانه‌ها و افزایش درزها و ترک‌های موجود با بزرگ شدن اندازه ذرات، بیش‌تر است. با افزایش تنش محدودکننده، مقادیر زاویه اصطکاک مصالح گردگوشه با افزایش اندازه دانه‌ها افزایش [۲۳]، [۲۵]، [۲۶]، [۲۷]، ولی در مصالح تیزگوشه با افزایش اندازه دانه‌ها به‌علت شکست بیش‌تر کاهش [۱۴]، [۲۵]، می‌یابد. نمونه‌های زه‌کشی شده مقدار شکست ذرات بیش‌تری از نمونه‌های زه‌کشی نشده از خود نشان داده و متراکم‌تر می‌شوند.

یکی از عوامل مؤثر بر شکست ذرات، تعداد تماس‌ها و فاصله ذرات از یکدیگر است. هرچه تخلخل نمونه بیش‌تر باشد، درصد شکست ذرات در آن بیش‌تر است. دلیل این مسئله بزرگ بودن نیروهای تماسی در نمونه‌های با تخلخل زیاد است. ذرات تشکیل شده از کانی‌های با مقاومت پایین، تحت تنش‌های کم‌تری شکسته می‌شوند. وجود رطوبت در نمونه باعث می‌شود که ذرات راحت‌تر حرکت کنند و این حرکت باعث افزایش تماس ذرات با یکدیگر و بالا رفتن مقدار شکست ذرات در سطح کرنش‌های بزرگ می‌شود. بنا بر این در نمونه‌های مرطوب، شکست ذرات نسبت به نمونه‌های خشک بیش‌تر است. هرچه دانه‌بندی یک‌نواخت‌تر باشد، تعداد ذره‌های موجود در واحد حجم نمونه کم‌تر است و بنا بر این نیروهای تماسی بین ذرات بیش‌تر شده و شکست ذرات افزایش می‌یابد.

روش‌های مختلفی برای تعیین مقدار شکست ذرات وجود دارد. تعدادی از این روش‌ها عبارتند از: روش لسلی<sup>۱</sup> (۱۹۶۳)، روش لی<sup>۲</sup> و فرهومند<sup>۳</sup> (۱۹۶۷)، روش هازن<sup>۴</sup> (۱۹۱۱)، روش میورا<sup>۵</sup> و او-هارا<sup>۶</sup> (۱۹۷۹)، روش هاردین<sup>۷</sup> (۱۹۸۵)، روش مارسال<sup>۸</sup> (۱۹۶۷). شاخص شکست مارسال  $B_g$  به‌طور وسیعی در آزمایش‌های سه‌محوری برای بیان شکست دانه‌ها به‌کار می‌رود. این شاخص، تغییرات توزیع کلی اندازه دانه‌ها قبل و بعد از آزمایش را دربر می‌گیرد. روش کار بدین‌صورت است که تفاوت درصد باقی مانده روی هر اندازه الک محاسبه می‌شود:  $\Delta w_k = w_{ki} - w_{kf}$ . که در این رابطه  $w_{ki}$  و  $w_{kf}$ ، به‌ترتیب درصد باقی‌مانده روی الک اندازه  $k$  قبل و بعد از آزمایش است.  $B_g$  به‌صورت مجموع مقادیر مثبت  $\Delta w_k$  و به‌صورت درصد گزارش می‌شود. حد پایین  $B_g$  صفر است و بیان‌گر این است که هیچ شکست ذره‌ای رخ نداده است. حد بالای  $B_g$ ، ۱۰۰٪ است و بیان‌گر این است که تمامی ذرات به اندازه‌های کوچک‌تر از اندازه کوچک‌ترین الک استفاده شده شکسته شده‌اند.

در این مقاله، روشی برای اندازه‌گیری انرژی شکست و شاخص شکست دانه‌ها ( $B_g$ ) در هر مرحله از کرنش محوری در تعدادی از مصالح شنی تیزگوشه و گردگوشه پوسته تعدادی سد سنگ‌ریزه‌ای تحت آزمایش CD ارائه می‌گردد.

### مشخصات مصالح بررسی شده

پاره‌ای از مشخصات مصالح شنی سنگریزه‌ای بررسی شده در جدول ۱ ارائه شده است. پیش از ساخت آزمون‌ها، آزمایش‌های زیر جهت تعیین مشخصات مورد نیاز انجام شده است. مقدار حداکثر دانسیته خشک  $\gamma_{d\max}$  و درصد رطوبت بهینه با آزمایش تراکم اصلاح شده (ASTM D1557) محاسبه شد. آزمایش شاخص بارنقطه‌ای براساس استاندارد ASTM D5731 انجام و مقاومت دانه‌های سنگ، محاسبه شده است. آزمایش سایش لوس آنجلس براساس استاندارد ASTM C535 انجام شد. این آزمایش برای تعیین کیفیت نسبی مصالح که دارای کانی مشابه هستند، به‌کار می‌رود.

۱. Leslie	۲. Lee	۳. Farhoomand	۴. Hazen	۵. Miura
۶. O-hara	۷. Hardin	۸. Marsal		



## روش آزمایش و نتایج اولیه آزمایش‌ها

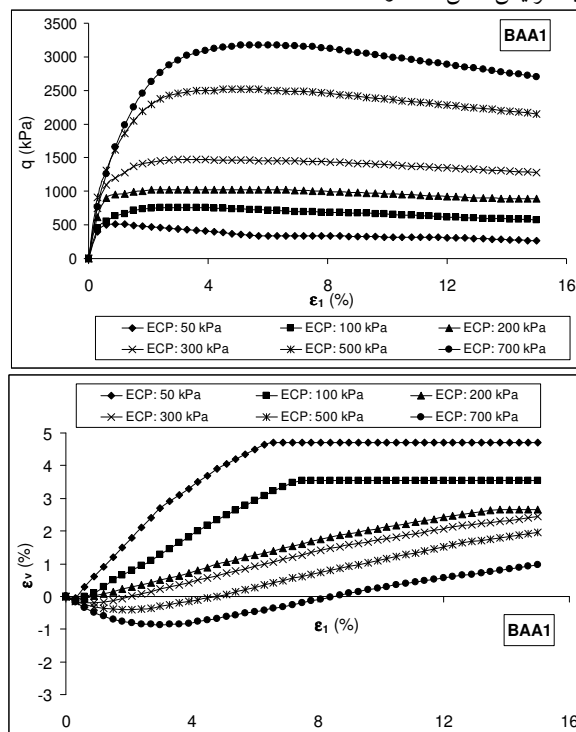
مقادیر اندازه‌های مختلف مصالح سنگریزه‌ای برای دستیابی به دانه‌بندی مورد نیاز برای ساخت نمونه‌ها از طریق وزن مخصوص خشک حداکثر به صورت وزنی تعیین و بعد از مرطوب شدن با رطوبت بهینه مخلوط شدند. از قالب‌های شکاف‌دار برای قالب‌گیری نمونه‌ها استفاده شد. مخلوط به ۶ قسمت تقسیم و برای کوبش از کمپکتور برقی با فرکانس cycle/s ۶۰ استفاده گردید. تمهیداتی برای کوبش یک‌نواخت نمونه به صورت کوبش کم‌تر لایه‌های پایین و افزایش مدت کوبش برای لایه‌های بالایی صورت گرفت. نمونه‌ها پس از عبور گاز CO<sub>2</sub> و تخلیه هوا، از طریق عبور آب بدون هوا از پایین به بالای محفظه سه‌محوری و به کارگیری سیستم زه‌کشی فوقانی، با خارج شدن هوا از فضاها، اشباع شدند. بعد از این که مقدار B اسکمپتون بیش از ۹۵٪ رسید که مبین کافی بودن اشباع شدگی است، ابتدا تحکیم نمونه تحت فشار همه‌جانبه مورد نیاز انجام و سپس نمونه‌ها تحت بار تحت شرایط زه‌کشی شده مورد بارگذاری به صورت کرنش کنترل با سرعت ۰/۵ میلی‌متر بر دقیقه قرار می‌گرفتند. بارهای محوری، جابه‌جایی قائم و تغییر حجم نمونه به صورت هم‌زمان ثبت گردیده است. در انتهای آزمایش دانه‌بندی روی نمونه صورت گرفت.

نمونه‌ای از نتایج آزمایش‌های سه‌محوری شامل منحنی‌های تنش-کرنش-تغییر حجم در شکل ۱ برای مصالح BAA1 ارائه شده است. به‌طور کلی مشاهده می‌شود کرنش محوری در لحظه گسیختگی با افزایش تنش محدود کننده افزایش می‌یابد. همه مصالح تیز گوشه با توجه به تنش محدود کننده رفتار اتساعی و انقباضی در منحنی‌های تغییر حجم-کرنش محوری از خود نشان می‌دهند. ضمناً کرنش حجمی اتساعی با افزایش تنش محدود کننده کاهش چشم‌گیری می‌یابد.

شکل ۲ تغییرات نسبت تنش‌های اصلی حداکثر  $(\sigma'_1 / \sigma'_3)_{max}$  در برابر شاخص شکست مارسال ( $B_g$ ) برای مصالح سنگریزه‌ای و رودخانه‌ای را نشان می‌دهد. چنان‌که انتظار می‌رود  $B_g$  با  $(\sigma'_1 / \sigma'_3)_{max}$  کاهش می‌یابد.

شکل ۳ تغییرات شاخص شکست در برابر تنش محدود کننده دو نوع مصالح سنگریزه‌ای و رودخانه‌ای را نشان می‌دهد. اگرچه داده‌ها پراکنده هستند،  $B_g$  اندکی با افزایش  $\sigma'_3$  افزایش

می‌یابد که نرخ نظیر برای مصالح سنگریزه‌ای اندکی بیش‌تر است. اثر اندازه دانه و تنش محدود کننده روی  $B_p$  برای مصالح سنگریزه‌ای در مقایسه با مصالح رودخانه‌ای قابل توجه است [۲۵]. لذا شکست دانه یکی از دلایل اصلی کاهش اتساع و نسبت تنش‌های اصلی با افزایش تنش محدود کننده است.

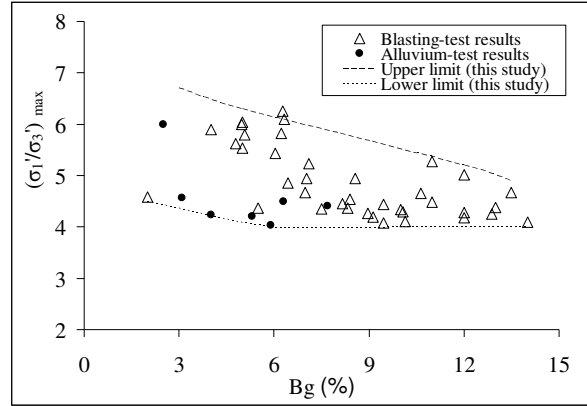


شکل ۱. منحنی‌های تنش- کرنش محوری-کرنش حجمی مصالح BAA1

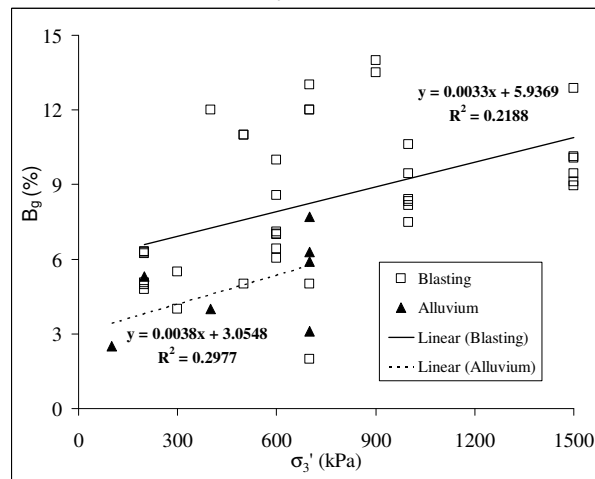
### تخمین شاخص شکست ذرات در آزمایش سه‌محوری

در ادامه، روشی برای محاسبه مقدار شکست ذرات در طول آزمایش سه‌محوری ارائه می‌شود. یونگ<sup>۱</sup> و چن<sup>۲</sup> (۲۰۰۰) با استفاده از اصل مینیمم انرژی (راو<sup>۳</sup>، ۱۹۶۲) و با در نظر گرفتن شکست ذرات، برای مصالح ماسه‌ای رابطه تنش-اتساع را ارائه دادند. طبق اصل مینیمم انرژی راو، شکست و لغزش ذرات در سویی اتفاق می‌افتد که انرژی جذب شده داخلی حداقل باشد.

۱. Ueng      ۲. Chen      ۳. Rowe



شکل ۲. تغییرات  $(\frac{\sigma_1}{\sigma_3})_{max}$  در برابر  $B_g$



شکل ۳. تغییرات  $B_g$  در برابر  $\sigma_3'$

با توجه به این که در حال حاضر از نتایج آزمایش‌های سه‌محوری به صورت وسیع در تعیین پارامترهای مقاومتی و تغییرشکلی مصالح خاکی و سنگریزه‌ای استفاده می‌شود لذا شکل ۴ که نمونه سه‌محوری متقارن تحت برش تحت شرایط زه‌کشی شده را در نظر می‌گیریم. می‌دانیم که در مصالح دانه‌ای، لغزش دانه‌ها و شکست دانه با هم‌دیگر رخ می‌دهد. بار عمودی  $F_{1i}$  و بار افقی  $F_{3i}$  را در مرز  $i$  بین دو دانه که تحت بار اعمالی دچار لغزش می‌شوند را در نظر بگیریم.

سطح لغزش، زاویه  $\beta_i$  با صفحه تنش‌های اصلی حداکثر،  $\sigma'_1$ ، می‌سازد. اگر  $N_i$  و  $S_i$  به ترتیب نیروی بار عمودی و مقاومت در سطح لغزش باشند با حل مجدد  $F_{3i}$  و  $F_{1i}$  می‌توان نشان داد که:

$$N_i = F_{1i} \sin \beta_i + F_{3i} \cos \beta_i \quad (1)$$

$$S_i = F_{1i} \cos \beta_i - F_{3i} \sin \beta_i \quad (2)$$

که  $S_i$  را می‌توان با فرض چسبندگی برابر صفر طبق رابطه موهركلمب بیان کرد:

$$S_i = N_i \tan \phi_\mu \quad (3)$$

که  $\phi_\mu$  زاویه اصطکاک بین دو دانه است. اگر  $\delta u_i$  جابه‌جایی جزئی در مرز  $i$  در امتداد لغزش باشد مؤلفه‌های افقی  $\delta x_i$  و عمودی  $\delta y_i$  جابه‌جایی  $\delta u_i$  را می‌توان با این روابط بیان کرد:

$$\delta x_i = \delta u_i \sin \beta_i \quad (4)$$

$$\delta y_i = \delta u_i \cos \beta_i \quad (5)$$

$$\delta x_i = \delta y_i \tan \beta_i \quad (6)$$

اگر شکست دانه هم علاوه بر لغزش دانه‌ها در مرز تماس  $i$  رخ دهد در آن صورت کل کار انجام شده توسط  $F_{1i}$  و  $F_{3i}$  صرف غلبه بر مقاومت اصطکاک و شکست دانه‌ها می‌شود:

$$F_{1i} \delta y_i - F_{3i} \delta x_i = N_i \tan \phi_\mu \delta u_i + \delta E_{bi} \quad (7)$$

که  $\delta E_{bi}$  مقدار جزئی انرژی مصرف شده در طول شکست ذرات در مرز  $i$  به‌ازای جابه‌جایی  $\delta u_i$  است. با جای‌گزینی معادلات (۱)، (۵) و (۶) در معادله (۷) داریم:

$$F_{1i} \delta y_i - F_{3i} \delta y_i \tan \beta_i = F_{1i} \delta y_i \tan \beta_i \tan \phi_\mu + F_{3i} \delta y_i \tan \phi_\mu + \delta E_{bi} \quad (8)$$

اگر  $n_1$ ،  $n_2$  و  $n_3$  متوسط تعداد تماس در واحد طول به ترتیب در امتداد سه مؤلفه تنش اصلی  $\sigma'_1$ ،  $\sigma'_2$  و  $\sigma'_3$  منظور کنیم، متوسط نیروهای تماسی و مؤلفه جابه‌جایی عمودی را می‌توان بدین صورت نوشت:

$$F_{1i} = \frac{\sigma'_1}{n_2 n_3} \quad (9)$$

$$F_{3i} = \frac{\sigma'_3}{n_1 n_2} \quad (10)$$

$$\delta y_i = \frac{\delta \varepsilon_1}{n_1} \quad (11)$$

$\delta \varepsilon_1$  کرنش جزئی اصلی حداکثر است. از جای‌گزینی معادلات (۹)، (۱۰) و (۱۱) در معادله (۸) داریم:

$$(12)$$

$$\begin{aligned} \sigma'_1 \delta \varepsilon_1 - \sigma'_3 \delta \varepsilon_1 \left(\frac{n_3}{n_1}\right) \tan \beta_i &= \sigma'_1 \delta \varepsilon_1 \tan \beta_i \tan \phi_\mu + \sigma'_3 \delta \varepsilon_1 \left(\frac{n_3}{n_1}\right) \tan \phi_\mu + \delta E_{bi}(n_1 n_2 n_3) \\ &= \delta E_B = \delta E_{bi}(n_1 n_2 n_3) \end{aligned}$$

که  $n_1 n_2 n_3$  تعداد کل تماس در حجم محیط دانه‌ای است. اگر  $n_1 n_2 n_3$  انرژي جزئی شده در اثر شکست دانه در واحد حجم دانه‌ها در اثر کرنش جزئی  $\delta \varepsilon_1$  فرض شود و  $r_n = (n_3 / n_1)$  در آن صورت معادله (۱۲) بدین صورت می‌شود:

$$\sigma'_1 \delta \varepsilon_1 - \sigma'_3 \delta \varepsilon_1 r_n \tan \beta_i = \sigma'_1 \delta \varepsilon_1 \tan \beta_i \tan \phi_\mu + \sigma'_3 \delta \varepsilon_1 r_n \tan \phi_\mu + \delta E_B \quad (13)$$

با جای‌گزینی پارامترهای معمول تنش موثرمتوسط  $(p' = (\sigma'_1 + 2\sigma'_3) / 3)$  و تنش برشی  $(q = \sigma'_1 - \sigma'_3)$  به جای  $\sigma'_1$  و  $\sigma'_3$  رابطه (۱۳) بدین صورت درآید:

$$\left(p' + \frac{2q}{3}\right) \delta \varepsilon_1 - \left(p' - \frac{q}{3}\right) \delta \varepsilon_1 r_n \tan \beta_i = \left(p' + \frac{2q}{3}\right) \delta \varepsilon_1 \tan \beta_i \tan \phi_\mu \quad (14)$$

$$+ \left(p' - \frac{q}{3}\right) \delta \varepsilon_1 r_n \tan \phi_\mu + \delta E_B$$

با مرتب کردن رابطه (۱۴) داریم:

$$(15)$$

$$\frac{q}{p'} = \frac{r_n \tan(\beta_i + \phi_\mu) - 1}{\left[\frac{2}{3} + \frac{1}{3} r_n \tan(\beta_i + \phi_\mu)\right]} + \frac{\delta E_B}{p' \delta \varepsilon_1 \left[\frac{2}{3} + \frac{1}{3} r_n \tan(\beta_i + \phi_\mu)\right] [1 - \tan \beta_i \tan \phi_\mu]}$$

در حالت محدود تغییر جزئی کرنش‌های اصلی حداکثر (یعنی حالتی که  $\delta \varepsilon_1 \rightarrow 0$ )،  $\delta \varepsilon_1$  باید با تفاوت جزئی  $d\varepsilon_1$ ، و همین‌طور  $\delta E_B$ ،  $\delta y_i$  و  $\delta x_i$  با تفاوت جزئی  $dE_B$ ،  $dy_i$  و  $dx_i$  جای‌گزین شوند. بنا بر این در حالت حدی (یعنی حالتی که  $\delta \varepsilon_1 \rightarrow 0$ )، عبارت  $\delta E_B / \delta \varepsilon_1$  سمت راست معادله (۱۵) به  $dE_B / d\varepsilon_1$  تبدیل شده که بیان‌گر نرخ انرژي صرف شده در حین شکست در اثر برش است. راو (۱۹۶۲) پیشنهاد کرد که زاویه اصطکاک بین دانه‌ها  $\phi_\mu$  با  $\phi_f$ ، زاویه اصطکاک بعد از اصلاح اثر اتساع جای‌گزین شود. مقدار  $\phi_f$  متغیر بین  $\phi_\mu$  برای

مصالص متراکم تا  $\phi_{cv}$  برای مصالص خیلی سست در حالت حجم ثابت است. اختلاف بین  $\phi_f$  و  $\phi_{\mu}$  مرتبط به انرژی صرف شده برای آرایش مجدد دانه‌ها در حین برش در محیط دانه‌ای است. لازم به ذکر است که  $\phi_f$  زاویه اصطکاک مصالص سنگ‌ریزه‌ای بدون در نظر گرفتن اتساع و شکست ذرات است. بررسی‌ها نشان داد که  $\phi_f$  زاویه اصطکاک مصالص سنگ‌ریزه‌ای در تنش‌های محدود کننده مؤثر کم‌تر از ۲۰۰ kPa به شرط ایجاد شرایط حجم ثابت و در کرنش نظیر حالت حجم ثابت است. بر اساس اصل نسبت انرژی حداقل، تغییر شکل برشی توده دانه‌ای زمانی رخ می‌دهد که در هر مرز تماس  $i$ ، نسبت انرژی  $(ER_i = F_{1i}\delta y_i / F_{3i}\delta x_i)$  حداقل شود. با بسط عبارت  $ER_i$  و فرض  $d(ER_i)/d\beta = 0$  می‌توان امتداد لغزش در مرز تماس  $i$  (یعنی  $\beta_i = \beta_c$ ) برای شرایط نسبت حداقل انرژی را به دست آورد. به عبارت دیگر زمانی که  $ER_i = ER_{\min}$  باشد  $\beta_i = \beta_c$  است. با استفاده از اصل نسبت انرژی حداقل [۲۴]، مقادیر  $r_n$  و  $\beta_c$  را بدین صورت به دست آوردند:

$$r_n = (1 - \frac{d\varepsilon_v}{d\varepsilon_1}) / \tan \beta_c \quad (16)$$

$$\beta_c = 45^\circ - \phi_f / 2 \quad (17)$$

که  $d\varepsilon_v$  کرنش حجمی جزئی محدود (حالت فشرده شدن مثبت فرض شود) در اثر کرنش محوری  $d\varepsilon_1$  در آزمایش سه محوری است.

با جای‌گزینی معادلات (۱۶) و (۱۷) و  $\phi_{\mu}$  با  $\phi_f$  و  $\beta_i = \beta_c$  در معادله (۱۵) و استفاده از عبارات دیفرانسیل جزئی، نسبت تنش تفاضلی به صورت زیر در می‌آید:

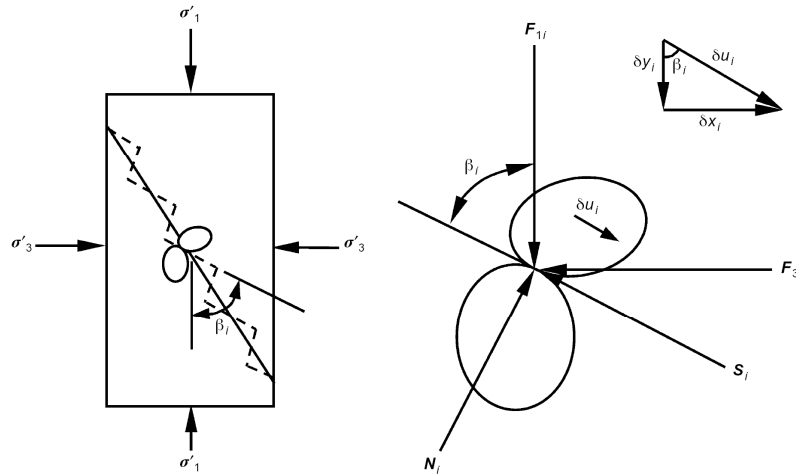
$$\frac{q}{p'} = \frac{(1 - \frac{d\varepsilon_v}{d\varepsilon_1}) \tan^2(45^\circ + \frac{\phi_f}{2}) - 1}{[\frac{2}{3} + \frac{1}{3}(1 - \frac{d\varepsilon_v}{d\varepsilon_1}) \tan^2(45^\circ + \frac{\phi_f}{2})]} + \frac{dE_B(1 + \sin \phi_f)}{p' d\varepsilon_1 [\frac{2}{3} + \frac{1}{3}(1 - \frac{d\varepsilon_v}{d\varepsilon_1}) \tan^2(45^\circ + \frac{\phi_f}{2})]} \quad (18)$$

کمیت  $(1 - \frac{d\varepsilon_v}{d\varepsilon_1})$  بیان‌گر اتساع در هنگام برش است.

انرژی صرف شده در هنگام شکست ذرات را می‌توان به شاخص شکست دانه‌ها  $B_g$  نسبت داد. شاخص شکست مارسال ( $B_g$ ) با افزایش کرنش محوری ( $d\varepsilon_1$ ) افزایش می‌یابد و رابطه خطی بین  $dE_B/d\varepsilon_1$  و  $dB_g/d\varepsilon_1$  وجود دارد. به عبارت دیگر:

$$dE_B = \beta dB_g \quad (19)$$

که در آن  $\beta$  ثابت تناسب است (ایندراراتنا<sup>۱</sup> و سلیم<sup>۲</sup>، ۲۰۰۲ و ۲۰۰۴).



شکل ۴. فشار سه محوری روی دانه‌های درشت دانه در نمونه سه محوری متقارن و مدل سازی تغییر شکل دندانه اره‌ای و جزئیات نیروها و تغییر شکل‌ها در مرز تماس دو دانه [۹]، [۲۴]. (ایندراراتنا و سلیم، ۲۰۰۴)

اگر فقط مؤلفه پلاستیک کرنش در نظر گرفته شده و فرض شود که هر افزایش جزئی تنش ( $dq$  و  $dp'$ )، باعث رسیدن حالت تعدادی از دانه‌ها به حالت بحرانی لغزش می‌شود، و با جای‌گزینی رابطه (۱۹)، رابطه (۱۸) به رابطه زیر تبدیل می‌شود:

(۲۰)

$$dB_g = \{dq d\varepsilon_1^p \left[ \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{d\varepsilon_v^p}{d\varepsilon_1^p}\right) \tan^2 \left(45^\circ + \frac{\phi_f}{2}\right)\right] - \left[ \left(1 - \frac{d\varepsilon_v^p}{d\varepsilon_1^p}\right) \tan^2 \left(45^\circ + \frac{\phi_f}{2}\right) - 1 \right] dp' d\varepsilon_1^p \} / [\beta (1 + \sin \phi_f)]$$

بنا بر این با محاسبه شاخص شکست مارسال ( $B_g$ ) در انتهای آزمایش و محاسبه  $dE_B$  برای کرنش‌های محوری مختلف از رابطه (۱۹) و با توجه به این‌که  $\beta$  در طول آزمایش ثابت است،

۱. Indraratna

۲. Salim

مقادیر  $B_g$  برای کرنش‌های محوری مختلف از رابطه (۲۰) محاسبه می‌شود. مدل‌سازی تعدادی از آزمایش‌های سه‌محوری بزرگ مقیاس و هم‌چنین تحلیل برگشتی تغییرشکل‌ها و تنش‌های ایجاد شونده در حین ساخت و اولین آب‌گیری سد بلند سنگ‌ریزه‌ای مسجدسلیمان نشان داد که مدل سخت‌شوندگی نرم‌افزار پلاکسیس<sup>۱</sup> از قابلیت بسیار مناسب در شبیه‌سازی رفتار مصالح سنگ‌ریزه‌ای دارد [۱]، [۲]، [۲۸]. این مدل زاویه اتساع  $\psi$  را با استفاده از کرنش‌های حجمی و کرنش اصلی حداکثر بدین‌صورت در نظر می‌گیرد.

$$\frac{\varepsilon_v}{\varepsilon_1} = \frac{2 \sin \psi}{1 - \sin \psi} \quad (21)$$

لازم به ذکر است که پارامترهای سمت راست رابطه (۲۰) جزء خروجی‌های مدل‌سازی با مدل رفتاری سخت‌شوندگی است. با توجه به به‌کارگیری اصل مینیمم انرژی راو (۱۹۶۲) در مدل سخت‌شوندگی [۲۱]، قابلیت اندازه‌گیری فاکتور شکست را می‌توان به مدل سخت‌شوندگی نرم‌افزار پلاکسیس<sup>۱</sup> اضافه کرد. نکته دیگر این‌که  $\phi_f$  به‌عنوان پارامتر کلیدی در مدل‌سازی‌های شکست‌دانه‌ها است. توجه شود که برای تمام تنش‌های محدود کننده بررسی شده برای یک مصالح، اگر مقادیر انرژی شکست در برابر کرنش محوری  $dE_B$  منفی شد و یا مقادیر بزرگ‌تر از ۱ در سطح کرنش‌های کوچک برای  $dE_B$  به‌دست آمد مقادیر  $\phi_f$  استفاده شده درست نیست.

### نتایج تخمین مقدار شکست دانه

در شکل ۵ تغییرات زاویه اصطکاک در برابر کرنش محوری در تنش‌های محدودکننده مختلف مصالح BAA1 ارائه شده است. مقدار زاویه اصطکاک در هر سطح تنش محدودکننده براساس رابطه زیر و با فرض چسبندگی صفر محاسبه شده است.

$$\sin \phi' = \frac{\sigma_1' - \sigma_3'}{\sigma_1' + \sigma_3'} \quad (22)$$

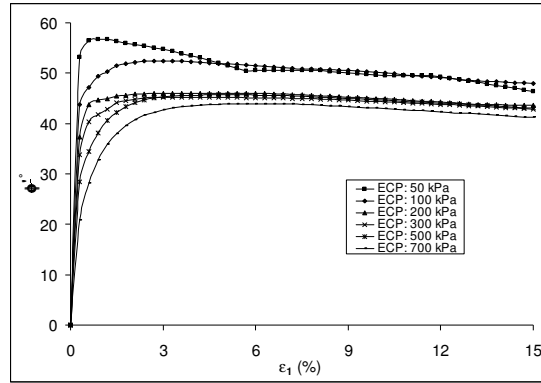
نکته جالب توجه برابر بودن زاویه اصطکاک  $\phi_f$  برای تنش‌های محدود کننده ۵۰ و ۱۰۰ kPa و تفاوت چشم‌گیری آن با مقادیر نظیر در تنش‌های محدود کننده بیش‌تر است. براساس

۱. Plaxis

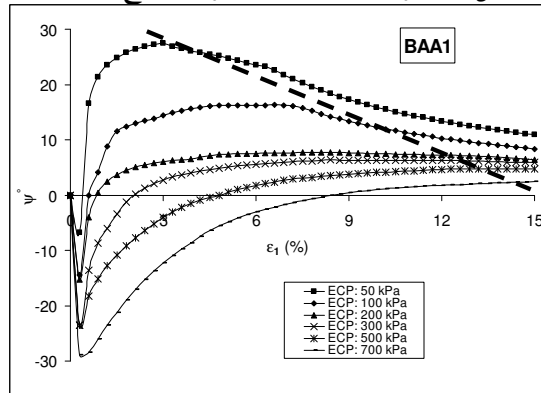
منحنی تنش- کرنش-تغییرحجمی مصالح BAA1 (شکل ۱) در تنش‌های محدود کننده ۵۰ و ۱۰۰ kPa حالت حجم ثابت را در کرنش‌های بالا داریم.

یکی دیگر از پارامترهای کلیدی در محاسبه فاکتور شکست دانه‌ها، اتساع است. در شکل ۶ تغییرات زاویه اتساع (طبق فرمول ۲۱) در برابر کرنش محوری در تنش‌های محدودکننده مختلف برای مصالح BAA1 نشان داده شده است. مقادیر حداکثر زاویه اتساع (تقاطع منحنی‌ها در سمت مثبت محور با خط‌چین) تطابق خوبی با مقادیر حاصل از مدل‌سازی‌ها با مدل سخت شونده‌گی نرم‌افزار پلاکسیس دارد. مطابق شکل ۶ چنان‌که انتظار می‌رود در ابتدا به علت فشردگی نمونه حتی اتساع منفی (کاهش حجم داریم) و سپس چنان‌چه تنش محدودکننده برای نمونه کم باشد نمونه دچار یک اتساع زیاد و سپس کاهش اتساع را داریم. علت اتساع زیاد در کرنش‌های نزدیک به تنش تفاضلی حداکثر در تنش‌های محدودکننده کم ناشی از شرکت بیش‌تر دانه در افزایش مقاومت ناشی از اتساع، و کاهش مشارکت آن در سطح کرنش‌های بالا به علت محدود شدن مشارکت دانه‌های قابل اتساع در زون کوچک برشی است. در تنش‌های محدودکننده بالا از ابتدا یک فشردگی بزرگ مشاهده می‌شود، اما اثر مشارکت دانه در ایجاد اتساع به علت تنش محدود کننده بالا و شکست دانه‌ها محدود است.

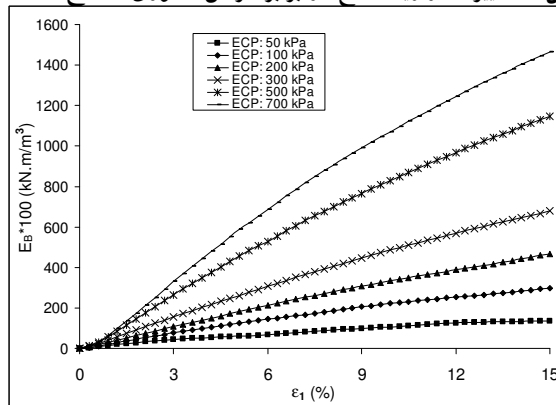
شکل ۷ تغییرات انرژی شکست در برای کرنش محوری مصالح BAA1 را نشان می‌دهد. ملاحظه می‌شود که با افزایش تنش محدودکننده و کرنش محوری بر مقدار انرژی شکست افزوده می‌شود. چنان‌که در شکل مشاهده می‌شود در سطح کرنش‌های کوچک، منحنی انرژی شکست دارای یک انحنا به سمت بالا بوده و مقدار آن هم اندک می‌شود. این با واقعیت هم انطباق دارد زیرا در سطح کرنش‌های کوچک، بار تفاضلی اولیه صرف جابه‌جایی دانه‌ها قابل حرکت در نمونه می‌شود. نکته جالب توجه دیگر کاهش نرخ انرژی شکست در سطح تنش‌های محدودکننده کم در کرنش‌های محوری بزرگ است که علت آن می‌تواند ناشی از محدود شدن شکست دانه در زون برشی باشد. برعکس در تنش‌های محدودکننده بالا نرخ انرژی شکست خیلی بیش‌تر از مقادیر نظیر در سطح تنش‌های محدود کننده کم است.



شکل ۵. تغییرات زاویه اصطکاک برای مصالح BAA1

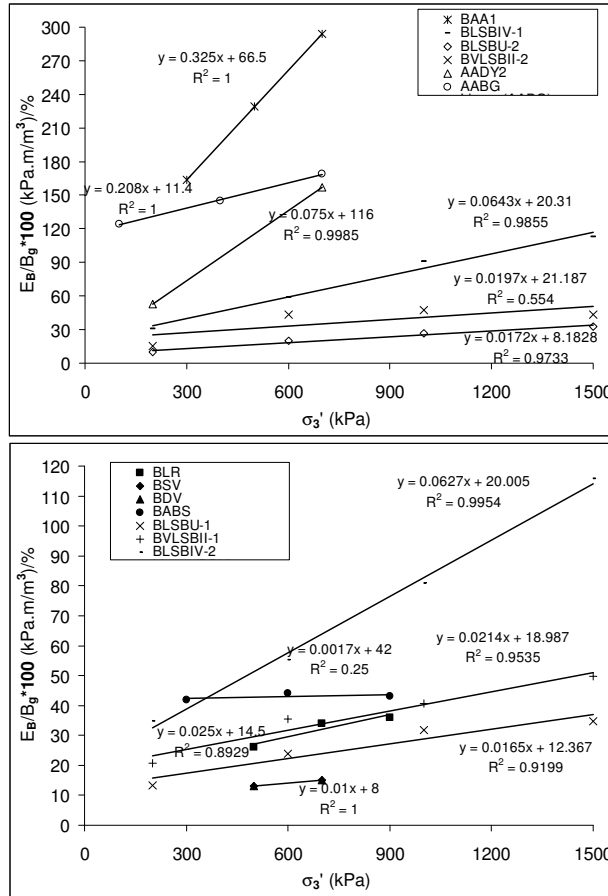


شکل ۶. تغییرات زاویه اتساع در برابر کرنش محوری مصالح BAA1



شکل ۷. تغییرات انرژی شکست در برای کرنش محوری مصالح BAA1

شکل ۸ رابطه  $E_B/B_g$  در برابر  $\sigma'_3$  در لحظه گسیختگی مصالح مختلف را نشان می‌دهد. نکته جالب توجه وجود رابطه خطی بین پارامترهای یاد شده است. با تعمیم این ارتباط به سطح کرنش‌های غیر از گسیختگی می‌توان مقادیر فاکتور شکست در هر مرحله از کرنش محوری محاسبه کرد (شکل ۹).

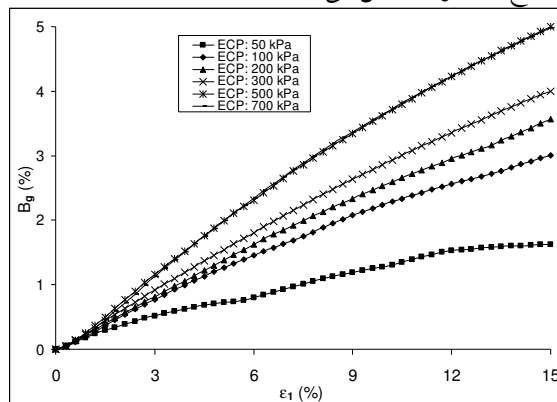


شکل ۸. رابطه  $E_B/B_g$  در برابر  $\sigma'_3$

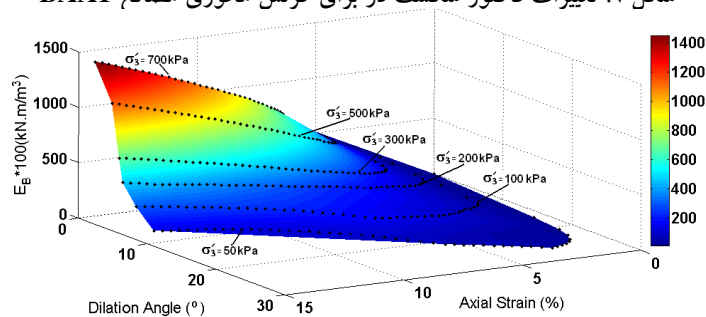
شکل ۱۰ رابطه  $\psi$  و  $E_B$  در برابر کرنش محوری در تنش‌های محدود کننده مختلف برای مصالح BAA1 را نشان می‌دهد. چنان‌که مشاهده می‌شود که با افزایش تنش محدود

کننده در کرنش‌های بالا، انرژی شکست افزایش، اما اتساع نمونه کاهش می‌یابد. ضمناً در اتساع‌های زیاد در آغاز اعمال برش، انرژی شکست کم است.

شکل ۱۱ رابطه زاویه اتساع مدل‌سازی در برابر نسبت شاخص شکست مارسال به ترتیب در همه کرنش‌ها و حالت حداکثر (مثبت) را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که با افزایش فاکتور شکست مارسال، اتساع در نمونه کاهش می‌یابد.



شکل ۹. تغییرات فاکتور شکست در برای کرنش محوری مصالح BAA1



شکل ۱۰. تغییرات  $\psi^\circ$  و  $E_B$  در برابر کرنش محوری مصالح BAA1

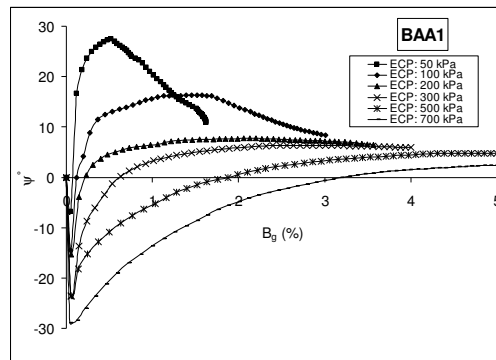
در جدول ۲ مقادیر شاخص شکست حاصل در انتهای آزمایش‌های سه‌محوری و مدل‌سازی‌ها طبق فرمول ۲۰ و همچنین نتایج انرژی شکست ارائه شده است. در شکل ۱۲ مقایسه  $B_g$  حاصل از آزمایش با نتایج مدل‌سازی ارائه شده است. مشاهده می‌گردد که مدل پیشنهادی با دقت قابل قبولی قادر به تخمین  $B_g$  است.

جدول ۲. نتایج مدل‌سازی‌ها برای محاسبه مقادیر شاخص شکست

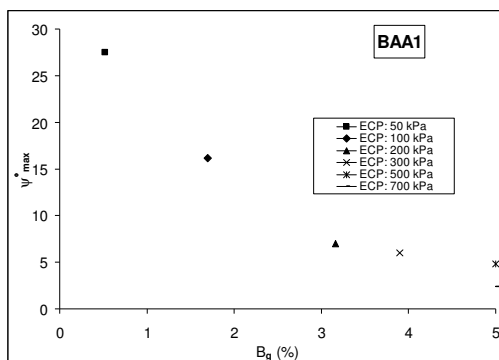
نام مصالح سنگریزه‌ای	$\sigma_3'$ (kPa)	$\phi_f'$ در حالت بحرانی برای ۲۰۰ kPa $\sigma_3' <$	Bg (%) گسیختگی		$E_B \# 100$ (kN.m/m <sup>3</sup> ) (گسیختگی)	$E_B/B_g \# 100$ (kN.m/m <sup>3</sup> )/(%) گسیختگی	
			آزمایش شده	محاسبه‌شده		آزمایش شده	محاسبه‌شده
BLR	۱۰۰	۴۷	-	۴.۵	۷۷	-	۱۷
	۳۰۰		-	۸.۸	۱۹۳	-	۲۲
	۵۰۰		۱۱	۱۰.۸	۲۹۱	۲۶	۲۷
	۷۰۰		۱۲	۱۲.۸	۴۰۹	۳۴	۳۲
	۹۰۰		۱۳.۵	۱۳.۳	۴۹۲	۳۶	۳۷
	۱۲۰۰		-	۱۴	۶۲۲	-	۴۴.۵
BSV	۱۰۰	۴۶.۵	-	۴.۴	۴۰	-	۹
	۳۰۰		-	۷.۶	۸۴	-	۱۱
	۵۰۰		۱۱	۱۱	۱۴۰	۱۳	۱۳
	۷۰۰		۱۲	۱۲	۱۸۰	۱۵	۱۵
BDV	۵۰	۴۶.۴	-	۶.۹	۱۳.۴	-	۱.۹۴
	۱۰۰		-	۱۱.۴	۳۱.۵	-	۲.۷۶
	۲۰۰		-	۱۲.۲	۵۳.۸	-	۴.۴۱
	۴۰۰		۱۲	۱۲	۹۲.۳	۷.۶۹	۷.۶۹
	۷۰۰		۱۳	۱۳	۱۶۴	۱۲.۶۱	۱۲.۶۱
	۱۲۰۰		-	۱۳.۳	۲۷۶.۵	-	۲۰.۸۱
BABS	۳۰۰	۴۱	۵.۵	۵.۴	۲۲۹	۴۲	۴۲.۳
	۶۰۰		۱۰	۱۰.۳	۴۴۲	۴۴	۴۳
	۹۰۰		۱۴	۱۳.۹	۶۰۵	۴۳	۴۳.۷
BDZ	۱۰۰	۵۴	-	-	۸۸	-	-
	۲۰۰		-	-	۶۹۳	-	-
	۴۰۰		-	-	۱۳۵۶	-	-
	۵۰۰		-	-	۱۴۸۲	-	-
	۷۰۰		-	-	۱۹۰۰	-	-
	۸۰۰		-	-	۲۲۱۰	-	-
BAA1	۵۰	۴۹.۵	-	۱.۷	۱۳۶	-	۸۰.۴
	۱۰۰		-	۳.۱	۳۰۰	-	۹۷
	۲۰۰		-	۳.۶	۴۷۳	-	۱۳۰.۳
	۳۰۰		۴	۴	۶۵۷	۱۶۴	۱۶۳.۵
	۵۰۰		۵	۵	۱۱۴۳	۲۲۹	۲۳۰
	۷۰۰		۵	۵	۱۴۷۱	۲۹۴	۲۹۶.۵

نام مصالح سنگ‌ریزه‌ای	$\sigma_3$ (kPa)	$\phi_r'$ در حالت بحرانی برای ۲۰۰ kPa $\sigma_3' <$	Bg (%) گسیختگی		$E_B * 100$ (kN.m/m <sup>3</sup> ) (گسیختگی)	$E_B/B_g * 100$ (kN.m/m <sup>3</sup> )/(%) گسیختگی	
			آزمایش شده	محاسبه شده		آزمایش شده	محاسبه شده
BAA1-re	۳۰۰	۴۹.۵	-	-	۷۲۳	-	-
	۷۰۰		-	-	۱۳۰.۴	-	-
BAA2	۵۰	۴۷	-	-	۳۷	-	-
	۱۰۰		-	-	۶۸	-	-
	۳۰۰		-	-	۱۷۷	-	-
	۷۰۰		۲	-	۳۵۸	۱۷۹	-
BLSBU-1	۲۰۰	۴۴	۴.۸	۴.۱	۶۴	۱۳	۱۵.۷
	۶۰۰		۷	۷.۵	۱۶۷	۲۴	۲۲.۳
	۱۰۰۰		۷.۵	۸.۲	۲۳۸	۳۲	۲۸.۹
	۱۵۰۰		۱۰.۱	۹.۵	۳۵۲	۳۵	۳۷.۱
BVLSBII-1	۲۰۰	۴۶.۷	۵	۴.۴	۱۰۲.۹	۲۱	۲۳.۳
	۶۰۰		۶	۶.۷	۲۱۳.۶	۳۵	۳۱.۸
	۱۰۰۰		۸.۳	۸.۴	۳۳۹	۴۱	۴۰.۴
	۱۵۰۰		۹	۸.۷	۴۴۷	۵۰	۵۱.۱
BLSBIV-1	۲۰۰	۴۷.۳	۶.۳	۵.۸	۱۹۳	۳۱	۳۳.۲
	۶۰۰		۷.۱	۷.۱	۴۱۹	۵۹	۵۸.۹
	۱۰۰۰		۸.۴	۹	۷۶۱	۹۱	۸۴.۶
	۱۵۰۰		۹.۱	۸.۸	۱۰۳۱	۱۱۳	۱۱۶.۸
BLSBU-2	۲۰۰	۴۶.۵	۵.۱	۴.۴	۵۱	۱۰	۱۱.۶
	۶۰۰		۶.۴	۷	۱۳۰	۲۰	۱۸.۵
	۱۰۰۰		۸.۲	۸.۵	۲۱۶	۲۶	۲۵.۴
	۱۵۰۰		۱۲.۹	۱۲.۵	۴۲۴	۳۳	۳۴
BVLSBII-2	۲۰۰	۴۶.۹	۶.۲	۳.۸	۹۶.۶	۱۶	۲۵.۱
	۶۰۰		۷	۹.۲	۳۰۵	۴۳	۳۳
	۱۰۰۰		۹.۵	۱۰.۹	۴۴۶	۴۷	۴۰.۹
	۱۵۰۰		۹.۵	۸.۱	۴۱۳	۴۴	۵۰.۷
BLSBIV-2	۲۰۰	۴۷.۴	۶.۳	۶.۸	۲۲۰	۳۵	۳۲.۵
	۶۰۰		۸.۶	۸.۲	۴۷۴	۵۵	۵۷.۶
	۱۰۰۰		۱۰.۶	۱۰.۴	۸۶۰	۸۱	۸۲.۷
	۱۵۰۰		۱۰.۱	۱۰.۲	۱۱۶۵	۱۱۶	۱۱۴.۱
AADY1	۲۰۰	۴۰	-	-	۴۲	-	-
	۴۰۰		-	-	۷۹	-	-

نام مصالح سنگریزه‌ای	$\sigma_3'$ (kPa)	$\phi_r'$ در حالت بحرانی برای ۲۰۰ kPa $\sigma_3' <$	Bg (%) گسیختگی		$E_B \cdot 100$ (kN.m/m <sup>3</sup> ) (گسیختگی)	$E_B/B_g \cdot 100$ (kN.m/m <sup>3</sup> )/(%) گسیختگی	
			آزمایش شده	محاسبه شده		آزمایش شده	محاسبه شده
			۷۰۰	۷.۷		-	۱۲۷
AADY2	۲۰۰	۳۷	۵.۳	۵.۳	۲۸۱	۵۳	۵۳
	۴۰۰		-	۶.۶	۶۲۸	-	۹۴.۶
	۷۰۰		۶.۳	۶.۳	۹۸۷	۱۵۷	۱۵۷
AADY2-re	۲۰۰	۳۷	-	-	۲۸۱	-	-
	۴۰۰		-	-	۶۲۲	-	-
	۷۰۰		-	-	۱۰۳۳	-	-
AABG	۱۰۰	۴۰.۶	۲.۵	۲.۵	۳۱۱	۱۲۴	۱۲۳.۵
	۴۰۰		۴	۴	۵۷۹	۱۴۵	۱۴۶
	۷۰۰		۵.۹	۵.۹	۱۰۰۰	۱۶۹	۱۶۸.۵
ADBS2	۲۰۰	۴۱	-	-	۸۳	-	-
	۴۰۰		-	-	۳۲۰	-	-
	۷۰۰		-	-	۵۱۴	-	-
ADBS1	۲۰۰	۴۱	-	-	۱۷۱	-	-
	۴۰۰		-	-	۲۹۰	-	-
	۷۰۰		۳.۱	-	۴۹۰	۱۵۸	-
AAA	۳۰۰	۴۰	-	-	۶۲	-	-
	۵۰۰		-	-	۱۱۶	-	-
	۷۰۰		-	-	۱۶۷	-	-

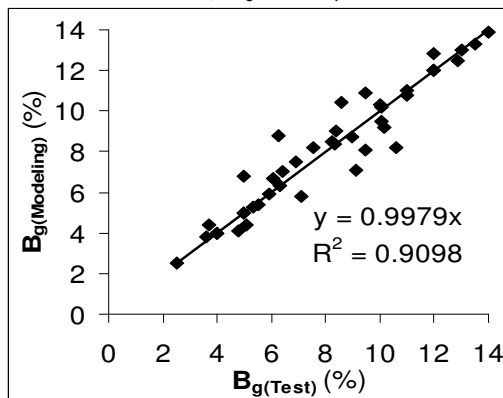


الف



ب

شکل ۱۱. رابطه زاویه اتساع مدل‌سازی در برابر نسبت شاخص شکست مارسال، الف) همه (ب) حداکثر (مثبت)



شکل ۱۲. مقایسه  $B_g$  حاصل از آزمایش با نتایج مدل‌سازی

### جمع‌بندی

در این مقاله ضمن بررسی نتایج شکست ذرات در تعدادی آزمایش سه‌محوری، روشی برای محاسبه مقدار شکست دانه‌ها با استفاده از اصل مینیمم انرژی راو (۱۹۶۲) در هر سطح از کرنش محوری ارائه شد. خلاصه نتایج بدین شرح است:

- با افزایش  $B_g$  مقدار  $(\sigma'_1 / \sigma'_3)_{max}$  کاهش می‌یابد.

- $B_g$  اندکی با افزایش  $\sigma'_3$  افزایش می‌یابد که نرخ نظیر برای مصالح سنگریزه‌ای اندکی بیش‌تر از مقادیر نظیر رودخانه‌ای است.
- با افزایش تنش محدود کننده و کرنش محوری بر مقدار انرژی شکست افزوده می‌شود.
- بین  $E_B/B_g$  و  $\sigma'_3$  در لحظه گسیختگی مصالح مختلف رابطه خطی وجود دارد.
- در سطح کرنش‌های کوچک، منحنی انرژی شکست دارای یک انحنای به سمت بالا بوده و مقدار آن هم اندک است. نرخ انرژی شکست تحت تنش‌های محدود کننده کم در کرنش‌های محوری بزرگ، کاهش می‌یابد که علت آن می‌تواند ناشی از محدود شدن شکست دانه در زون برشی باشد. برعکس در تنش‌های محدود کننده بالا، نرخ انرژی شکست خیلی بیش‌تر از مقادیر نظیر در سطح تنش‌های محدود کننده کم است.
- با افزایش فاکتور شکست مارسال، اتساع در نمونه کاهش می‌یابد.

### قدردانی

این تحقیق با کمک مالی مرکز تحقیقات راه، مسکن و شهرسازی و امکانات آزمایشگاهی بخش ژئوتکنیک انجام شد که بدین وسیله تشکر می‌گردد.

### منابع

1. Aghaei Araei A., "Back Analysis of Deformations Induced During First Impounding of the Masjed-E-Soleyman Dam", M.Sc. Thesis, Department of Civil and Environmental Engineering, Amirkabir University of Technology, Tehran, Iran (2002).
2. Aghaei Araei A., Soroush A., Rayhani M., "Large-Scale Triaxial Testing and Numerical Modeling of Rounded and Angular Rockfill Materials", Scientia Iranica, Transaction A: Civil Engineering, Sharif University of Technology, Vol.17 (3) (2010) 169-183.

3. Bilam J., "Some aspects of the behavior of granular materials at high pressures, In Stress-Strain Behavior of Soils: Proceedings of the Roscoe Memorial Symposium", Cambridge, 29-31 March 1971, Edited by R. H. G. Parry. G. T. Foulis & Co. Ltd., Henley-on-Thames, UK. (1971) 69-80.
4. Hamidi A., Yazdanjou V., Salimi N., "Shear strength characteristics of sand-gravel mixtures", The International Journal of Geotechnical Engineering, Vol. 3 (1) (2009a) 29-38.
5. Hamidi A., Alizadeh M., Soleimani S. M., "Effect of Particle Crushing on Shear Strength and Dilation Characteristics of Sand-Gravel Mixtures" Vol. 7(1) (2009b) 61-71.
6. Hardin B. O., "Crushing of soil particles", Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, Vol. 111(10) (1985) 1177-1192.
7. Hazen A., "Discussion of Dam on Sand Foundation", by A. C. Koenig, Transaction ASCE, New York, N.Y., 73 (1911).
8. Hirschfeld R. C., Poulos S. J., "High-pressure triaxial tests on a compacted sand and an undisturbed silt", Laboratory Shear Testing of Soils, ASTM, Special Technical Publication, Vol. 361 (1963) 329-339.
9. Indraratna B., Salim W., "Modelling of particle breakage of coarse aggregates incorporating strength and dilatancy", Proceedings of the Institution of Civil Engineers, London, Vol. 155(4) (2002) 243-252.
10. Indraratna B., Ionescu D., Christie H. D., "Shear behavior of railway ballast based on large-scale triaxial tests", Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, Vol. 124(5) (1998) 439-449.

11. Lade P. V., Yamamuro J. A., Bopp, P. A., "Significance of particle crushing in granular materials, Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering", Vol. 122 (4) (1996) 309-316.
12. Lee K. L., Farhoomand I., "Compressibility and crushing of granular soils in anisotropic triaxial compression", Can. Geotech. J., Ottawa, Canada, Vol. 4(1) (1967) 68-86.
13. Leslie D. D., "Large scale triaxial tests on gravelly soils", Proceeding of the 2nd Pan-American Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Brazil, Vol.1 (1963) 181-202.
14. Marachi N. D., Chan C. K., Seed H. B., "Evaluation of properties of rockfill materials", J. SMFE, Vol. 98 (1972) 95-114.
15. Marsal R. J., "Large scale testing of rockfill materials", Journal of the soil Mechanics and Foundations Div., ASCE, Vol. 93 (SM2) (1967) 27-43.
16. Miura N., O-hara S., "Particle crushing of decomposed granite soil under shear stresses", Soils and Foundations, Vol. 19 (3) (1979) 1-14.
17. Plaxis7.2, User Manual, Brinkgreve R. B. J. and Vermeer, P. A.
18. Rowe P. W., "The stress-dilatancy relation for the static equilibrium of an assembly of particles in contact", Proc. rock society, A269 (1962) 500-527.
19. Russell A. R., Khalili N., "A bounding surface plasticity model for sands exhibiting particle crushing", Can. Geotech. J., Vol. 41 (2004) 179-1192.

20. Salim W., Indraratna B., "A new elastoplastic constitutive model for coarse granular aggregates incorporating particle breakage", *Can. Geotech. J.*, Vol. 41 (2004) 657-671.
21. Schanz T., Vermeer P. A., Bonnier P. G., "Formulation and verification on the Hardening Soil Model", *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geotechnics* (1998) 281-296.
22. Soroush A., Aghaei Araei A., "Analysis of behavior of a high rockfill dam", *Proc. of the Institution of Civil Engng., Geotechnical Engng* 159, Issue GEI, Paper 13980 (2006) 49-59.
23. Sudhindra C., Venkatachalam K., Soni M. L., Sivakumar N., Sharma P., "Large size triaxial shear tests on rockfill materials for design parameters", *Proc. 56<sup>th</sup> Research and Development Session, CBIB, Hyderabad* (1991) 29-34.
24. Ueng T. S., Chen T. J., "Energy aspects of particle breakage in drained shear of sands", *Géotechnique*, Vol. 50(1) (2000) 65-72.
25. Varadarajan A., Sharama K. G., Venkatachalam K., Gupta A. K., "Testing and modeling two rockfill materials", *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE*, March (2003) 206-218.
26. Varadarajan A., Sharma K. G., Abbas S. M., Dhawan A. K., "Constitutive model for rockfill materials and determination of material constants", *International journal of Geomechanics, ASCE / July/August* (2006) 226-237

27. Venkatachalam K., "rediction of mechanical behavior of rockfill materials" PhD thesis, Indian Institute of Technology, Delhi, India (1993).

۲۸. آقای آرای، ع.، سروش. ع.، طباطبایی، س.ه.، قلندرزاده، ع.، ارزیابی رفتار سه‌محوری مونوتونیک مصالح شن، پروژه تحقیقاتی، مرکز تحقیقات ساختمان و مسکن (۱۳۸۹).