صفحات ۱۰۷ – ۱۲۲

# ارزیابی و مقایسه دقت دادههای گسلی و لرزهای در تحلیل فرکتالی زمینساخت زاگرس شمال غرب

ابوالقاسم گورابی<sup>۱</sup>؛ دانشیار ژئومورفولوژی، دانشکده جغرافیا، دانشگاه تهران، تهران، ایران. سید محمد زمانزاده؛ دانشیار ژئومورفولوژی، دانشکده جغرافیا، دانشگاه تهران، تهران، ایران. مجتبی یمانی*؛* استاد ژئومورفولوژی، دانشکده جغرافیا، دانشگاه تهران، تهران، ایران. پریسا پیرانی؛ دانشجوی دکتری ژئومورفولوژی، دانشکده جغرافیا، دانشگاه تهران، تهران، ایران.

دریافت مقاله : ۱۳۹۹/۱۱/۲۸ پذیرش نهایی:۱۴۰۰/۰۷/۱۴

#### چکیدہ

تغییرات مکانی پارامترهای فرکتالی عامل مهمی برای بررسی وضعیت زمینساختی است. در هندسه فرکتال، بعد فرکتال در بررسی مقیاسی، حفظ میشود که بیانگر خاصیت اصلی فرکتال است. در این تحقیق به منظور بررسی کارایی روش فرکتال در بررسی زمینساخت زاگرس شمال غرب، به مقایسه و آزمون یکسان بودن نتایج ابعاد فرکتالی گسلها در نقشههایی با مقیاسهای مختلف، و زمینلرزههایی با طول دوره و جزئیات و مقیاسهای مختلف بزرگا پرداخته شد. برای این منظور از ۶ لایه اطلاعاتی استفاده گردید و ابعاد فرکتالی آنها به روش مربع شمار محاسبه و نتایج بعد فرکتالی آنها مورد تحلیل قرار گرفتهاند. دو دسته داده گسلی مستقیماً و دو دسته داده زمینلرزه (پژوهشگاه بینالمللی زلزله و مؤسسه ژئوفیزیک) یکبار بدون تغییر و دیگر بار برای افزایش دقت با احتساب بزرگای کمال وارد محاسبات شدند. نتایج نشان می دهد که ابعاد هندسی گسلهای منطقه فرکتالی است و تنها تفاوت در ثبت جزئیات گسلها سبب تغییری جزئی در ترتیب مناطق فعال در دو مقیاس شده است و نتایج دو مقیاس تقریباً مشابه است. در مورد دادههای لرزهای نتایج دادههای از ۱۹۰۰ تا ۲۰۲۰ که از تعداد کمتر زمینلرزه و مقیاس مختلف منجرگای تقریباً مشابه است. در مورد دادههای لرزهای نتایج دادههای از ۱۹۰۰ تا ۲۰۲۰ که از تعداد کمتر زمین لرزه و مقیاس مختلف میاس تقریباً مشابه است. در مورد دادههای لرزهای نتایج دادههای از ۱۹۰۰ تا ۲۰۲۰ که از تعداد کمتر زمین لرزه و مقیاس مختلف منجر را مدور دارند تطبیقی با واقعیت نشان نمی دهند، در صورتی که می توان به نتایج ابعاد فرکتالی دادههای زمین لرزه های منحصراً سده ۲۰ که از نظر دقت و مقیاس ثبت بزرگا یکسان هستند، اعتماد نمود. نتایج آن، فعال ترین منطقه از نظر بعد فرکتالی را محدوده غرب کرمانشاه نشان می دهد و شاهد آن تمرکز زمین لرزه هایی با بزرگای بالاتر به ویژه زمین لرزه اخیر کرمانشاه با

واژه های کلیدی: فرکتال، زمین ساخت، زاگرس شمال غرب، گسل، زمین لرزه.

۱:نویسنده مسئول

Email: goorabi@ut.ac.ir

مقدمه

هندسه اقلیدسی یا هندسه کلاسیک، اشیائ فیزیکی قابل توصیف با استفاده از خطوط، دوایر، بیضی و ... را با بعد صحيح دربر می گیرد. با این حال الگوهایی در طبيعت يافت می شود که به طور قابل توجهی بسیار پیچیده هستند (Schuller et al, ۲۰۰۱:۲). پدیدههای ناهموار با اشکال نامنظم و بیقاعده، از اصول هندسه اقلیدسی پیروی نمیکنند. هندسهای که برای این پدیدهها و ابعاد ناصحیح آنها به کار میرود، هندسه فرکتال ٔ نامیده میشود. ابعاد هندسه فرکتال اعشاری هستند و محدودیتی برای اندازه گیری پدیدههای طبیعی ایجاد نمیکنند و امکان مقایسه آنها را فراهم میآورند (Turcotte, ۱۹۷۷:۱۲۱). در اندازهگیری خط ساحلی، محققان دریافتند در اندازهگیری با واحدی کوچکتر و دقیقتر، طول ظاهری ساحل طولانی تر است، در صورتی که برای یک شیء محصور غیر فرکتالی مانند یک دایره، طول کلی پیرامونی آن به یک عدد ثابت نزدیک خواهد شد (Schuller et al, ۲۰۰۱:۲). واژه فرکتال اولین بار توسط مندلبروت٬ ریاضیدان در سال ۱۹۷۵ از واژه لاتین فراکتوس٬ گرفته شد تا بر ماهیت قطعه قطعه شونده که یکی از مشخصههای اصلی این فرم است، تأکید داشته باشد (کرم، ۱۳۸۹: ۷۳). هندسه فرکتالی به توصیف اشیایی میپردازد که خود متشابه یا متقارن هستند و صرف نظر از اینکه با چه دقتی یک شی فرکتالی را بررسی کنیم، درجه نوسان آن بدون تغییر باقی خواهد ماند (Baas, ۲۰۰۲, ۳۱۱). بنابراین در فرکتالها این بعدفرکتال است که مهم است و نه مقیاس، زیرا در هر اندازهای، بعدفرکتال حفظ می شود و بیانگر خاصیت اصلی فرکتال است (Phillips, ۲۰۰۲, ۱٤٤). تغییرات مکانی پارامترهای فرکتالی عامل مهمی برای بررسی وضعیت زمینساختی است. با تعیین بعد فرکتال ساختارهای خطی مثل گسلها، می توان بسیاری از خصوصیات آنها را تخمین زد و و تراکم این ساختارهای خطی را تعیین و با یکدیگر مقایسه نمود (Turcotte, ۱۹۷۷:۱۲۱). علاوه بر آن گسل های اصلی یا فرعی در مناطقی از طول خود که هندسه بیقاعده دارند، بیشتر دچار گسیختگی میشوند (Schwartz & Coopersmith, ۱۹۸٤: ۱۷). در نتیجه بدون در نظر گرفتن مقیاس، سیمای ناهموار سیستمهای گسلی در گسلها میتواند تابع هندسه فرکتالی بوده و این بی نظمی هندسی می تواند به صورت بعد فرکتالی بررسی شود (Sukmono et al, ۱۹۹۲: م). این عامل با رفتار لرزهای گسل نیز مرتبط است. زمینلرزه یکی از رخدادهای همزاد با گسلش است (Bachmanov, et al, ۲۰۱۲: ۲۲۱) و جانمایی و تمرکز زمینلرزهها در یک منطقه بیانگر تنش و آزاد شدن انرژی و به طور کلی مبین فعال بودن منطقه از نظر زمینساختی است (بیتالهی، ۱۳۸۹: ۱). یکی از روشهایی که در سالهای اخیر به طور گستردهای در تحلیلهای لرزهخیزی مورد استفاده قرار گرفتهاند، روشهای فرکتالی هستند (میرعابدینی و همکاران، ۱۳۹۰: ۲). در تحلیل فرکتالی میتوان گفت افزایش بعد فرکتالی بیانگر محیط مناسب برای تجمع انرژی و آزاد شدن آن در آینده است همچنین این تحلیل بیانگر عبور مسیرهای تنش در یک منطقه گسترده است که در برخورد با سطوح ضعیف (گسلهای موجود) میتوانند عامل حرکت آنها و آزاد شدن انرژی باشد که نشان دهنده ناپایداری منطقه است (فاتحی و همکاران، ۱۳۹۰: ۳۹).

پس از انتشار کتاب مندل بروت در زمینه فرکتال (۱۹۸۲)، محققان متعددی سعی در بررسی مسائل مختلف با روشهای فرکتالی نمودند از جمله ، کینگ (King, ۱۹۸۳) به کاربرد فرکتال در زمینساخت پرداخت، و پس از او

- ۱. Fractals
- ۲. Mandelbrot
- ۳. Fractus

تورکوته (Turcotte, ۱۹۸٦) مفهوم فرکتال را مورد استفاده قرار داد و در کتاب خود (۱۹۹۲) به بسط آن در بررسی مسائل زمینساختی به ویژه شبکه زهکشی، گسل و زمینلرزه پرداخت. هیراتا (Hirata, ۱۹۸۹) با استفاده از الگوریتم مربع شمار، خود تشابهی فرکتالی هندسه شکستگی سنگها بر اساس نقشه گسلها را بررسی نمود و نتیجه گرفت که از مرکز ژاپن به اطراف بعد فرکتالی کاهش مییابد. بادری (Bodri, ۱۹۹۳) با استفاده از روش فرکتال، ژاپن مرکزی را از طریق روشهای فراوانی-بزرگای توزیع زمینلرزه، توزیع کانون سطحی زمان شروع زمینلرزه و سیستم شکستگی گسلهای منطقه بررسی کرد و نتایج حاکی از انطباق مناسب مقادیر فرکتالی این روشها بود. لی و کوسنس ( & Lei Kusunose, ۱۹۹۹) با کمک روش مربع شمار، ساختارهای فرکتالی مربوط به توزیع فضایی سه سیستم زمین شناسی (کانونهای زمینلرزه، گسلهای فعال، رودخانهها) را مورد تحلیل قرار دادند و نتایج نشان داد که یک مقیاس مشخص مشترک ۱۳ کیلومتری، توزیع فضایی را به دو باند تقسیم میکند و در هر دو توزیع بصورت نمایی است. بهاتاچاریا و همکاران (Bhattacharya et al, ۲۰۰٤) با استفاده از مدل همپوشانی دو فرکتالی سعی نمودند مدلی از رخداد زمینلرزه را از طریق شبیهسازی و مقایسه با داده پسلرزه ارائه دهند و نتایج نشان داد که انتگرال تجمعی بزرگی پسلرزهها در طول زمان، خطی مستقیم با شیب مشخص است که شیب ان با هندسه فرکتال سطح گسل که اغلب پسلرزهها را تولید می کند، مرتبط است. گلوگن و همکاران (Gloaguen et al, ۲۰۰۷) بر مبنای دادههای سنجش از دور راداری و مدل ارتفاع رقومي به استخراج گسلها و تحليل فركتالي بخش جنوب شرقي ريفت كنيا پرداختند و نتايج أنها نشان داد بعد فرکتالی ابعاد گسلها با بعد فرکتالی حاصل از تصاویر سنجش از دور مشابه است و روش انها به درک تکامل سیستم گسل و طبقهبندی شدت تغییر شکل کمک میکند. ازترک (Ozturk, ۲۰۱۲) کانون های سطحی زمین لرزههای ترکیه را در یک دوره طولانی مدت از طریق بررسی مقادیر b و بعد فرکتالی مطالعه نمود و در نتیجه ترکیه را به ۵۵ منطقه تکتونیکی تقسیم کرد و همبستگی منفی بین این دو مقدار را نشانه شدت نسبتاً بالای تنش و خوشهبندی زمینلرزههای قویتر در منطقه دانست. پیلپلی و چووانگ (Pailoplee & Choowong, ۲۰۱۶) بعد فرکتالی و توزیع فراوانی-بزرگای ۱۳ منطقه منبع لرزه در جنوب شرق آسیا را با استفاده از مجموعه کامل دادههای لرزهای مورد بررسی قرار دادند و نتایج بیانگر تغییرات تنش لرزهای در منطقه بود و در نتیجه مناطق با تنش تکتونیکی بالا را مشخص نمودند. ستیاوان و ساپیه (Setyawan & Sapiie, ۲۰۱۹) در بررسی رابطه بین بعد فرکتالی توزیع فضایی مرکز پسلرزهها و گسل فعال سوماترا با استفاده از روش مربع شمار، بعد فركتالي اين گسل و همبستگي مثبت را مشخص نموده و ۱۵ زمینلرزه را از طریق پسلرزه با گسل سوماترا مرتبط دانستند. هویی و همکاران (Hudi et al, ۲۰۲۰) منطقه لرزهای تایوان را از نظر مشخصات چند فرکتالی توزیع فضایی-زمانی زمینلرزهها مورد ارزیابی قرار دادند و نتایج انها نشان داد منحنی زمانی چندفرکتالی، قبل و بعد از زمینلرزههای بزرگ تغییر میکند، همچنین مکانسیمهای کانونی و ساختاری زمینشناسی در عمق صفر تا نه کیلومتری پیچیدهتر هستند و نیز بین مقادیر فرکتالی و b همبستگی مثبت وجود دارد.

همانطور که گفته شد پدیدههای فرکتالی مستقل از مقیاس هستند یعنی همیشه در هر مقیاسی جزئیاتی برای مشاهده دارند و اگر بخشی از آنها را بزرگنمایی کنیم جزئیات آن تا بینهایت مشابه با پدیده اصلی خواهند بود. در این تحقیق فرکتالی بودن گسلهای منطقه در مقیاسهای مختلف و دادههای لرزهای با جزئیات مختلف مورد بررسی

قرار گرفته است. در واقع در این تحقیق بر آن هستیم که وضعیت زمین ساختی زاگرس شمال غربی را با استفاده از تحلیل فرکتالی دادههای مختلف گسلی و لرزهای با دقت متفاوت با استفاده از روش مربع شمار <sup>۱</sup> ارزیابی کنیم.

# دادهها و روش کار

## الف) قلمرو جغرافيايي مورد مطالعه

منطقه مورد مطالعه بخشی از زون زاگرس است که به نام کمان لرستان شناخته می شود (شکل ۱: الف). زاگرس به دو منطقه مرتفع (داخلی) و چینخورده (خارجی) تقسیم می شود. کمربند چینخورده زاگرس به طرف شمال شرق به کمربندی رورانده و گسل خورده تبدیل می شود (درویش زاده، ۱۳۷۰: ۲۰۲–۱۹۸). خود زاگرس چین خورده دارای ویژگی های زمین شناختی متفاوتی است و چندین زیر پهنه دارد که یکی از آن ها زیر پهنه لرستان است (آقانباتی، ۱۳۸۳: ۲۵). این زیر پهنه در قسمت شمال شرقی به منطقه رانده شده زاگرس متصل است و در قسمت جنوبی، زیر پهنه فروافتادگی ایذه در دنباله آن قرار گرفته است. همچنین زیر پهنه های فروافتادگی دزفول و کرکوک در جنوب غرب و شمال شرق آن قرار دارند. واحدهای مورفوتکتونیک و گسل های محدود کننده آن ها در منطقه از شمال غرب به جنوب شرق عبارتاند از؛ گسل معکوس اصلی زاگرس و گسل اصلی عهد حاضر، کمربند زاگرس مرتفع، گسل زاگرس مرتفع، کمربند ساده چین خورده، و گسل جبهه کوهستان (۱۹۳: ۱۹۹۰). مرز جنوبی محدوده نیز گسل بالارود است (آقانباتی، ۱۳۸۳: ۲۵) (شکل ۱: ب).



شکل ۱. موقعیت جغرافیایی، زمینساختی و لرزه زمینساختی منطقه مورد مطالعه (الف: سایت مؤسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران'، ؛ ب: برگرفته از (Masoudi et al, ۲۰۱۰: ۳۰۳۲)؛ ج: ترسیم: نگارندگان

Box-Counting method

زمینساخت و لرزهزمین ساخت ایران تحت تأثیر دو بلوک مقاوم توران (متعلق به صفحه اوراسیا) در شمال شرق و عربی در جنوب غرب است ( ۱۸۰ :۱۹۹۰ معربی Mckenzie) (شکل ۱: الف) ، بنابراین زمینساخت فعال و دگرشکلی آن تحت تأثیر حرکت رو به شمال صفحه عربی نسبت به اوراسیا است اما با توجه به توزیع زمینلرزهها، دگرشکلی فعال در آن یکسان توزیع نشده است. اندازه گیریهای جدید کل کوتاه شدگی را حدود ۲۰ میلیمتر تخمین زده اند که ۱۰ میلیمتر آن در زاگرس توزیع شده است ( ۲۰۰ : ۱۷۷، ۲۰۰ : ۲۰۰ ). همگرایی شمالی –جنوبی صفحه عربی – اوراسیا منطبق بر زاگرس شمال غربی است ( ۱۹۹، ۲۰۰ : ۱۹۵۸). فعالیت گسلهای معکوس و امتدادلغز نوار زاگرس را در زمره مناطق فعال لرزه خیز ایران قرار داده است (۵۰ : ۲۰۰ : ۱۹۹۸). فعالیت گسل اصلی معکوس زاگرس و گسل اصلی عهد حاضر مرز شمالی لرزه خیزی در زاگرس را تشکیل می دهد (۲۰

## ب)روش کار

این پژوهش به لحاظ هدف، از نوع کاربردی و به لحاظ روش از نوع تحلیلی به شمار می رود. در این تحقیق از دو دسته داده استفاده شده است: دادههای زمین لرزه با بزرگاهای مختلف که توسط مقیاسهای مختلف بزرگا ثبت شدهاند و مربوط به دوره طولانی تری هستند اما عمدتاً زمین لرزههای بزرگ (با بزرگای بیش از ۲) را در بر دارند (سایت پژوه شگاه بین المللی زلزله شناسی<sup>۲</sup>) و دادههای صرفاً زمین لرزه سده بیستم که از نظر مقیاس ثبت یکدست و از نظر تعداد رخداد از دقت بالایی برخوردارند (دریافت مستقیم از مؤسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران). همچنین گسلهای منطقه در دو مقیاس مورد ارزیابی قرار گرفته اند؛ مقیاس ۲۵۰۰۰۰۱ و مقیاس ۲۰۰۰۰۰۰ که در هر دو دسته بخشی از نقشه ها توسط سازمان نقشه برداری و بخشی توسط شرکت نفت تهیه شده اند. بدیهی است جزئیات درج شده در گسل های برداشت شده توسط این دو ارگان اندکی متفاوت هستند و تا حدودی نتایج را تحت تأثیر قرار خواهند داد، با این وجود در ارائه یک الگوی کلی از تغییرات ابعاد فرکتالی پدیده های زمین ساختی منطقه کمک کننده خواهند داد، با برای انجام این تحقیق، ابتدا لایه گسل های منطقه بر مین ساختی منطقه کمک کننده خواهند داد، با معرموع منطقه مورد مطالعه از هشت نقشه با مقیاس ۲۵۰۰۰۰۰ و مقیاس ۱۰۰۰۰۰۰ تا تیر قرار خواهند داد، با در این وجود در ارائه یک الگوی کلی از تغییرات ابعاد فرکتالی پدیده های زمین ساختی منطقه کمک کننده خواهند بود. در مرحله بعد از روش مربع شمار برای محاسه ابعاد فرکتالی گسل ها و زمین لرزههای منطقه استفاده شد.

## روش مربع شمار (بر آورد پارامتر D)

بعدفرکتالی پیچیدگی یک شیء فرکتالی را تعیین میکند، یک شیء با بعدفرکتالی پایین نسبت به شیء با بعد فرکتالی بالا کمتر پیچیده است (Schuller et al, ۲۰۰۱:۲). مندل بروت (۱۹۸۲) معادلاتی برای محاسبه بعدفرکتال با استفاده از دو کمیت N-S<sup>۳</sup> ارائه نمود. هاسدورف (Hausdorff, ۱۹۹۱) ابعاد فرکتالی که برای تمامی فرکتالها مفید هستند را تعریف نمود گرچه محاسبه دقیق آن مشکل است و برای جلوگیری از پیچیدگیهای محاسباتی آن دو مدل ارائه شده است. مدل اول به ریچاردسون (Richardson, ۱۹٦۱) نسبت داده میشود. مدل دوم، روش شمارش جعبهای نام دارد (Schuller et al, ۲۰۰۱:۳). که حاصل همپوشانی یک سری از شبکههای تشکیل یافته از مربعهایی با طول ضلع S بر روی عوارض و شمارش تعداد خانههای N با اندازه S است (Number-Size) که عارضه را دربر می گیرند.

http://irsc.ut.ac.ir

<sup>&</sup>lt;sup>\*</sup> <u>h</u>ttp://www.iiees.ac.ir (/fa/eqcatalog/)

<sup>&</sup>lt;sup>°</sup>. Number-Size



شکل ۲. الگوریتم مربع شمار و مراحل پیادهسازی آن روی گسلها و کانونهای زمینلرزه

مهم ترین پارامتر در بررسی لرزه خیزی، بزرگای کمال<sup>۱</sup> (M<sub>o</sub>) یا بزرگی آستانه <sup>۲</sup>(M<sub>b</sub>) است یعنی حداقل بزرگایی که داده های بالاتر از آن در کاتالوگ(مجموعه داده ها) کامل هستند است که می توان آن را با توجه به تغییر شیب نمودار فراوانی-بزرگای زمین لرزه ها به دست آورد. تصور بر این است که تغییر شیب یا افت تعداد رویدادهای لرزه ای در برابر بزرگی زمین لرزه هایی با بزرگای کوچک تر از بزرگای کمال، به علت عدم گزارش رویدادهای لرزه ای باشد ( & Wiemer بزرگی زمین لرزه هایی با بزرگای کوچک تر از بزرگای کمال، به علت عدم گزارش رویدادهای لرزه ای باشد ( Wyss, ۲۰۰۰: <sup>۸۵۹</sup>). این بزرگا محدوده داده هایی که بهتر است مورد تجزیه و تحلیل فرکتالی قرار گیرند را نشان می دهد (میر عابدینی و همکاران، ۱۳۹۰: ۱–۷). به این منظور ابتدا داده های رومرکز براساس تعداد وقوع به بزرگا، مرتب و سپس فراوانی تجمعی تعداد وقوع هر دسته بزرگا محاسبه شده و به صورت لگاریتمی در برابر بزرگاها قرار گرفت. محل شکست یا تغییر شیب در نمودار داده های ترسیم شده بیانگر بزرگای کمال یا بزرگای آستانه داده های لرزه ای است (شکل ۳).

<sup>&#</sup>x27;.Magnitude of completeness

<sup>&</sup>lt;sup>\*</sup>. Magnitude of threshold



شکل ۳. بر آورد بزرگای کمال یا بزرگای آستانه دادههای لرزهای (سمت راست: دادههای سایت پژوهشگاه بینالمللی زلزله؛ سمت چپ: دادههای مؤسسه ژئوفیزیک)

شکل ۵ دادههای مورد استفاده در تحلیل فرکتالی منطقه را نشان میدهد: گسلهای با دو مقیاس مختلف، دادههای زمینلرزه ۱۹۰۰ تا ۲۰۲۰ (پژوهشگاه بینالمللی زلزه) و منحصراً سده بیستم (مؤسسه ژئوفیزیک) ، با و بدون احتساب بزرگای کمال. تمامی این مراحل در دیاگرام تحقیق (شکل ۴) نشان داده شده است.



شکل ۴. دادههای مورد استفاده در فرایند تحقیق وتوزیع جعبههای پوشاننده منطقه مطالعاتی (پهنههای انتخاب شده در برگیرنده مناطق شاخص گسلی و نیز لرزهای به منظور ارائه یک الگوی طولی و عرضی از تغییرات گسلی و لرزهای و مقایسه بهتر دادهها میباشد)



شکل ۵. دیاگرام فرایند پژوهش (ترسیم: نگارندگان)

# شرح و تفسير نتايج

با توجه به دیاگرام تحقیق (شکل ۵) محاسبات ابعاد فرکتالی برای لایههای مورد استفاده در تحقیق (شکل ۴) صورت گرفت. جدول ۲ نتایج حاصل از همپوشانی شبکههایی با طول ضلعهای مختلف بر روی گسلهای با مقیاس ۱:۱۰۰۰۰۰ و رومرکز زمینلرزههای از ۱۹۰۰ تا ۲۰۲۰ با و بدون احتساب بزرگای کمال و نیز نتایج حاصل از شمارش خانههای حاوی این عوارض در هر یک از سطوح شبکه برای جعبههای مختلف را نشان میدهد (همین مراحل برای گسلهای با مقیاس ۲۵۰۰۰۰ و رومرکز زمینلرزههای سده بیست با و بدون احتساب بزرگای کمال بزرگای کمال نیز صورت پذیرفته است و برای پرهیز از اطاله کلام به ذکر نتایج نهایی آنها اکتفا شده است).

جدول ۱. تعداد خانههای (Number) حاوی خطوط گسلی (مقیاس ۱:۱۰۰۰۰۰) و رومرکز زمینلرزه با و بدون احتساب بزرگای کمال (MC) (از ۱۹۰۰ تا ۲۰۲۰) درهر سطح شبکه پوشش داده شده روی مناطق مطالعاتی A-F

• /• ۵	•/\•	•/٢•	•/٣٩	• /YA	۱/۵۶	٣/١٣	۶/۲۵	17/80	٢۵	۵۰	۱۰۰	طول شبکه پدیده	
58444	81768	10910	۷۸۴۵	3668	1071	۶۳۳	771	۶۳	18	۴	١	گسل	
۵۶۸	۵۶۸	۵۶۰	542	۵۰۸	4.7	798	188	۵۶	18	۴	١	رومرکز بی Mc	Α
۵۲۶	۵۲۶	۵۱۸	۵۰۳	414	۳۸۲	۲۵۷	١٣٢	۵۶	18	۴	١	رومرکز با Mc	
۱۱۸۹۰۳	۵۹۳۵۵	59125	15411	۵۷۴۰	5189	۷۲۷	۲۱۵	۵۹	18	۴	١	گسل	
-	-	-	120	١٢۵	171	١١٢	٨٨	49	18	۴	١	رومرکز بی Mc	В
-	-	-	١٢٣	١٢٣	١١٩	11.	٨٧	49	18	۴	١	رومرکز با Mc	
7499	١٢٢٣٨	6917	2200	1.94	477	178	۷۳	٣٢	١٢	۴	١	گسل	
-	-	-	7.7	7.7	194	۱۷۳	170	۵۸	18	۴	١	رومرکز بی Mc	C
-	-	-	۱۹۵	۱۹۵	١٨٧	184	177	۵۷	18	۴	١	رومرکز با Mc	
81791	۳۰۵۵۸	14729	8814	2982	1717	474	١٧٧	۵۸	18	۴	١	گسل	D
-	۳۷۹	۳۷۹	۳۷۸	368	۳۱۴	۲۳۳	101	۶.	18	۴	١	رومرکز بی Mc	ם

-	-	۳۵۶	۳۵۶	347	٣٠٠	777	140	<del>9</del> 9	18	۴	١	رومرکز با Mc	
10142	7988	49	۱۹۹۳	۹۵۷	449	7.8	٩٢	41	۱۵	۴	١	گسل	
-	٩٢۵	٩٢٢	۹۱۷	٩٠٨	۷۸۱	۵۰۰	771	54	18	۴	١	رومرکز بی Mc	Е
٨٩٧	٨٩٧	٨٩۴	٨٨٩	٨٨٠	۷۵۶	49.	77.	84	18	۴	١	رومرکز با Mc	
***17	77498	11778	۵۴۳۳	2021	1118	468	١٧٢	۵۸	18	۴	١	گسل	
-	۵۸۲	۵۸۲	۵۸۱	۵۷۴	542	471	7.8	54	18	۴	١	رومرکز بی Mc	F
-	085	085	581	۵۵۴	۵۲۳	4.9	۲۰۴	54	18	۴	١	رومرکز با Mc	]

در مرحله بعد طبق روش شمارش جعبهای (دیاگرام پژوهش: شکل ۴)، طول شبکه (سطر اول در جدول ۲ که برای دادههای گسلی و لرزهای یکسان در نظر گرفته شده است) به صورت معکوس (۱/۶) تبدیل شد و مقادیر لگاریتمی آن و نیز مقادیر لگاریتمی تعداد شبکههای حاوی عارضه (Number) (سطور دوم تا چهارم در جدول ۲) برای محاسبه بعد فرکتالی به دست آمد. شکلهای ۶، ۷ و ۸ نمودارهای به دست آمده برای ابعاد فرکتالی کلی دادههای جدول ۲ را نشان می دهد. بعد جزئی فرکتالی نیز با محاسبات رابطه ۲ (دیاگرام پژوهش شکل ۴) به دست میآید و بر اساس کمیت کلی می دهد. بعد جزئی فرکتالی نیز با محاسبات رابطه ۲ (دیاگرام پژوهش شکل ۴) به دست میآید و بر اساس کمیت کلی می دهد. بعد خزئی فرکتالی نیز با محاسبات رابطه ۲ (دیاگرام پژوهش شکل ۴) به دست میآید و بر اساس کمیت کلی می دهد. بعد زمینه ()، جامعه دوم با بعد بزرگتر از این مقدار، جامعه آستانه ۲ است و موید پیدایش یک جامعه متناظر کمینه تغییرات بعد فرکتالی و نشانگر کاهش آشفتگی و افزایش خواص فرکتال است. برای گسلها جامعه زمینه بین ۲ تا ۱/۴۴ را در برمی گیرد و جامعه آستانه بین ۱۹۹۰ تا ۱ است که یک جامعه فرکتالی با تکرار مؤلفهها است. در مورد رومرکز زمین لرزهها ارقام بعد فرکتالی قبل و بعد از بزرگای کمال به استثنائ محدوده D مشابه هستند. در این محدوده بعد فرکتالی پس از محاسبه بزرگای کامل کاهش می یابد. جامعه زمینه بین ۲ تا ۲۸۰ متغییر است . برایت مدوره بعد فرکتالی پس از محاسبه بزرگای کمال کاهش می یابد. جامعه زمینه بین ۲ تا ۲۵/۰ می به در این محدوده بعد فرکتالی پس از محاسبه بزرگای کمال کاهش می یابد. جامعه زمینه بین ۲ تا ۱۹۸۰ مینیر است . بالاترین مربوط



شکل ۶. نمودار Log/Log معکوس طول ضلع و تعداد خانههای حاوی گسل

<sup>&#</sup>x27;Background population

<sup>&</sup>lt;sup>\*</sup> Thershold population



شکل ۷. نمودار Log-Log معکوس طول ضلع شبکه و تعداد خانههای حاوی رومرکز زمین لرزه (۱۹۰۰ تا ۲۰۲۰) بدون بزرگای کمال



شکل ۸. نمودار Log-Log معکوس طول ضلع شبکه و تعداد خانههای حاوی رومرکز زمین لرزه (۱۹۰۰ تا ۲۰۲۰) با احتساب بزرگای کمال

در این تحقیق محدوده A در غرب کرمانشاه، عمدتاً در زاگرس چینخورده واقع شده است، محدودههای B، F، D به ترتیب از شمال به جنوب در امتداد شکستگی اصلی زاگرس قرار گرفتهاند. محدوده B شمال ترین قطعه است و بین دو گسل اصلی و گسل زاگرس مرتفع قرار دارد. محدوده D به طور مساوی بین دو زون چین خورده و رورانده واقع است. منطقه F، یعنی جنوبی ترین بخش و منطقه پیوند گسلهای اصلی زاگرس و گسل جبهه کوهستان زاگرس است و قلعه است و منطقه F، یعنی جنوبی ترین بخش و منطقه پیوند گسلهای اصلی زاگرس و گسل جبهه کوهستان زاگرس است و قرار است و قلعه است و بین دو منطقه و گسل اصلی و گسل زاگرس مرتفع قرار دارد. محدوده D به طور مساوی بین دو زون چین خورده و رورانده واقع است. منطقه F، یعنی جنوبی ترین بخش و منطقه پیوند گسلهای اصلی زاگرس و گسل جبهه کوهستان زاگرس است و منطقه و درجات پایین تری از تراکم گسل و فراوانی زمین لرزه را قسمتی از زون ایذه را در بر دارد. منطقه C یعنی حاشیه غربی درجات پایین تری از تراکم گسل و فراوانی زمین لرزه را دارا است و انتهای غربی آن بخشی از گسل جبهه کوهستان است. منطقه E نیز در شمال در مسیر گسل بالارود قرار

دارد و در جنوب مشرف بر فروافتادگی دزفول است. این قسمت نیز تراکم گسل به نسبت پایینی را نشان میدهد. جدول ۲ نتایج ابعاد فرکتالی کلی مربوط به دادههای مختلف مورد استفاده در فرایند تحقیق را نشان میدهد.

رومرکز ۱۹۰۰–۲۰۲۰	رومرکز ۱۹۰۰–۲۰۲۰	رومرکز سدہ	رومرکز سده ۲۰	گسل	گسل	داده
بی بزرگای کمال	بی بزرگای کمال	۲۰ با بزرگای	بدون بزرگای	1:70	1:1	چهارچوب
		كمال	كمال			
٠/٧۶٨٧	• /YA \ A	1/0748	١/• ١٩٢	1/3221	1/4841	A
۰/۸۲۵۹	۰/۸۲۹۸	۰/ <b>۷۶</b> ۰۵	•/٩۶۶٩	1/2011	1/2418	В
۰/۹۳۱۶	•/१٣٩٧	۰/۷۰۴۶	•/٧۴•٧	١/٣٣٢٨	1/3012	C
•/9661	۰/۸·۹۷	•/\&47	•/9844	1/21/62	1/8788	D
•/አ۵۴۶	۰/٨۶	1/0718	•/9174	١/•٧	1/5181	E
۰/۸۸۳۶	٠/٨٩٠٣	•/\\&&	•/ <b>\</b> \\Y	1/2002	۱/۳۷۷۵	F

جدول ۲. ابعاد فرکتالی دادههای مختلف مورد استفاده در تحقیق به تفکیک هر محدوده

همانطور که از جدول ۲ قابل مشاهده است در بررسی گسلهای منطقه ترتیب ابعاد فرکتالی در هر دو مقیاس نقشههای مورد استفاده مشابه است با این تفاوت که در مقیاس ۱:۲۵۰۰۰۰ محدوده A و در مقیاس ۱:۱۰۰۰۰۰ محدوده B دارای بالاترین بعد فرکتالی گسل است. نقشههای زمینشناسی این بخش (B) توسط سازمان زمینشناسی و با جزئیات بالای گسل و شکستگی و محدوده مجاور آن (A) توسط شرکت نفت تهیه شده است و این امر تفاوتی را در تراکم گسلها ایجاد نموده است. صرفنظر از این دو محدوده، سایر محدودهها به ترتیب بعد فرکتالی مقادیر بالا به پایین E ،C ،F ،D هستند که به عبارتی بیانگر ترتیب فعال بودن آنها از نظر مؤلفههای فرکتالی گسلی است. نتایج این دو مقیاس از نظر فعالیت گسل را میتوان با نتایج ابعاد فرکتالی زمینلرزهها مقایسه نمود. پارامتر D به عنوان یک اندازه گیری کمی از درجه عدم یکنواختی فعالیت لرزهای برای سیستمهای گسلی استفاده میشود و زمانی که زمینلرزها به طور فزایندهای خوشهبندی میشوند، مقدار آن کاهش پیدا میکند. افزایش بعد فرکتالی بیانگر توزیع یکنواخت کانون زمینلرزهها در سراسر یک منطقه و زمینساخت فعال آن است (Öncel & Wilson, ۲۰۰۲: ۳۳۹). در مورد زمینلرزهها همانطور که مشاهده میشود، فعالترین محدوده (بالاترین بعد فرکتالی رومرکز) و اَرامترین محدوده (پایینترین بعد فرکتالی رومرکز) در دو سری داده (سده بیستم و از ۱۹۰۰ تا ۲۰۲۰) کاملا عکس یکدیگر هستند به این صورت که در بررسی زمینلرزههای از ۱۹۰۰ تا ۲۰۲۰ با و بدون در نظر گرفتن بزرگای کمال، فعال ترین منطقه C و آرامترین منطقه A است که در بررسی زمینلرزههای سده بیستم این نتایج کاملا تغییر میکنند و معکوس میشوند. این در حالی است که محدوده C به استثنای بخش جنوب شرقی تراکم گسل بسیار کمی را دارا است و در هر دو داده زمینلرزه های آن تراکم کمتری دارند، در حالی که محدوده A هم از نظر تراکم گسل در هر دو مقیاس مورد مطالعه و هم از نظر تراکم زمینلرزه و بزرگای زمینلرزه جزو فعالترین مناطق در گستره مورد مطالعه است. نتایج بررسی رومرکز زمینلرزههای سده بیست در هر دو روش با احتساب بزرگای کمال و بدون در نظر گرفتن آن، فعال ترین محدودهها را A، E و D نشان میدهد. با مقایسه بعد فرکتالی گسلها و زمینلرزهها دو منطقه B و E از نظر تراکم گسل و زمینلرزه در نقطه مقابل یکدیگر قرار دارند. محدوده B تراکم بالای گسل و پایین زمینلرزه را دارا است و همچنین بزرگای زمینلرزههای

آن کوچکتر هستند در حالی که محدوده E تراکم پایینتری از گسل و شکستگی را نشان میدهد در حالی که تراکم و بزرگای رومرکز زمینلرزههای آن بالا است (که این امر را میتوان با گسلهای پنهان در این منطقه توجیه نمود که مسبب زمینلرزههای بسیاری بودهاند) (شکل ۹). میتوان چنین تحلیل نمود که در هر مقیاس مورد استفاده، در صورتی که دادهها بصورت یکدست و دقیق و کامل ثبت شوند، نتایج ابعاد فرکتالی مقیاسهای مختلف نقشه بایستی در تأیید یکدیگر باشند. همچنین هر چه دادههای لرزهای کاملتر باشند و از یک مقیاس برای ثبت آنها استفاده شده باشد نتایج به واقعیت نزدیکتر و در تأیید نتایج قبل خواهد بود.



شکل ۹. تراکم و بزرگای رومرکز زمینلرزهها در محدودههای مورد مطالعه

#### نتيجهگيرى

در این تحقیق به منظور بررسی کارایی روش فرکتال در بررسی زمینساخت زاگرس شمال غرب به مقایسه و آزمون یکسان بودن نتایج ابعاد فرکتالی در گسلهای مقیاسهای مختلف نقشههای زمینشناسی (۱۰۰۰۰۰ و ۱۰:۲۵۰۰) و زمینلرزههای با طول دوره، جزئیات و دقتهای مختلف بزرگا مربوط به ارگانهای مختلف (کانون سطحی زمینلرزه از ۱۹۰۰ تا ۲۰۲۰ پژوهشگاه بینالمللی زلزله با و بدون احتساب بزرگای کمال، کانون سطحی زمینلرزه سده بیستم مؤسسه ژئوفیزیک با و بدون احتساب بزرگای کمال) از روش مربعشمار استفاده و بعد فرکتال (D) موارد ذکر شده مورد تحلیل قرار گرفت. نتایج این تحقیق را میتوان به شرح زیر ارائه نمود:

- ۱. تنها تفاوتی که سبب تغییر اولویت مناطق فعال شده در دو مقیاس گسلی مورد استفاده شده است، تفاوت در ثبت جزئیات گسلها و شکستگیهای ارگانهای تهیه کننده آنها (شرکت نفت و سازمان زمین شناسی) است. به عنوان مثال در نقشههای ۲۵۰ هزار، امتداد گسل در نقشه کرمانشاه (سازمان زمین شناسی) با ورود به ورق کوهدشت (شرکت نفت) قطع می شود و در نقشههای ۱۰۰ هزار نیز این موارد قابل مشاهده است. با این وجود گسلهای منطقه در هر دو مقیاس ، ابعادی فرکتالی دارند و فعال ترین منطقه از نظر گسلی، در مقیاس ۲۵۰ هزار محدوده A (غرب کرمانشاه در زاگرس چین خورده) و در مقیاس ۱۰۰ هزار محدوده B در همان راستا (محدوه پیرامون کرمانشاه در زاگرس شکسته) است؛
- ۲. در مورد دادههای لرزهای نتایج دادههای ۱۹۰۰ تا کنون که از جزئیات کمتر و مقیاس مختلف ثبت بزرگا برخوردارند، تطبیقی با واقعیت نشان نمیدهند به صورتی که محدوده C (دارای تراکم پایین گسل و زمینلرزه) در اولویت اول و محدوده A (با تراکم بالای گسل و زمینلرزه) در آخر قرار گرفته است. این در حالی است که میتوان به نتایج ابعاد فرکتالی زمینلرزههای سده ۲۰ که از نظر دقت و مقیاس ثبت یکسان

هستند، اعتماد نمود. در این دادهها نتایج ابعاد فرکتالی با و بدون احتساب بزرگای کمال فعال ترین منطقه را محدوده A نشان میدهد. که با دادههای گسلی دقیق تر مورد استفاده در تحقیق (مقیاس ۱۰۰ هزار) انطباق دارد؛

۳. میتوان نتیجه گرفت که نه مقیاس (زیرا نتایج ابعاد فرکتالی در مقیاسهای مختلف مشابه بوده است) بلکه دقت و یکدستی ثبت دادههای گسلی و لرزهای است که نتایج محاسبه بعد فرکتالی را تحت تأثیر قرار خواهد داد، بنابراین استفاده از داده دقیق تر به دستبابی به نتایج صحیح تر کمک خواهد نمود.

سپاسگزاری

این مقاله از رساله دکتری مصوب در دانشکده جغرافیای دانشگاه تهران استخراج شده است و تحت حمایت مالی صندوق حمایت از پژوهشگران و فناوران کشور (INSF) انجام شده است. بدین وسیله از حمایت این صندوق تشکر و قدردانی میشود.

#### منابع

آقانباتی، سید علی. ۱۳۸۳. *زمین شناسی ایران*. چاپ اول. انتشارات سازمان زمین شناسی کشور، تهران. بیتالهی، علی؛ پانتهآ معتمد. ۱۳۸۹. محاسبه پرارمترهای لرزه خیزی برای منطقه البرز مرکزی. *پژوهشنامه زلزله شناسی،* ۱۴ ۱-۸ درویش زاده، علی. ۱۳۷۰. *زمین شناسی ایران*. چاپ اول. نشر دانش امروز (وابسته به انتشارات امیر کبیر)، تهران. فاتحی، محمد؛ محمد محجل و محمد مهدی خطیب. ۱۳۹۰. تحلیل فرکتالی گسلها و ارتباط آنها با زمین لرزهها در پهنه برش پانهای شکل گسل دهشیر. *پژوهش های دانش زمین،* ۲: ۳۶–۴۵. کرم، امیر ۱۳۸۹. نظریه آشوب، فرکتال و سیستمهای غیر خطی در ژئومور فولوژی. *فصلنامه جغرافیای طبیعی، ۳: ۲۸–۶۷.* میرعابدینی، مریم سادات؛ مریم آق آتابای و عزیز رحیمی چاکدل. ۱۳۹۰. بررسی خصوصیات فرکتالی زمانی زمین لرزههای ناحیه بلده ( البرز مرکزی). *سی امین گردهمایی علوم زمین*، ۱ تا ۳ اسفند ۹۰، وزارت صنعت معدن و تجارت، سازمان زمین شناسی، ۱

Blanc, E. J. P., M. B. Allen, S. Inger, and H. Hassani. ۲۰۰۳. Structural styles in the Zagros simple folded zone, Iran. *Journal of the Geological Society (London)*, ۲۲۰: ٤٠١–٤١٢. **DOI** ۱۰, ۱۱٤٤/۰۰۱٦-۲٦٤٩٠٢-۱۱۰. Bodri, B. ۱۹۹۳. A fractal model for seismicity at Izu-Tokai region, central Japan. *Earth Sciences*, 1: orgoff. **DOI** ۱۰, ۱۱٤۲/S・۲۱۸۳٤۸X۹۳۰۰۰۰۳

Hirata, T. 1949. Fractal dimension of fault systems in Japan: Fractal structure in rock fracture geometry at various scales. *pure and applied geophysics*, 171: 104–144. **DOI** 14,144. V/BF++AVEEA0

Hui, C., C. Cheng, L. Ning, and J. Yang. Y.Y. Multifractal Characteristics of Seismogenic Systems and b Values in the Taiwan Seismic Region. *International Journal of Geo-Information*, 4: 1-1°. **DOI** 1., TT9./ijgi9.7.TAE

Jackson, J., and D. Mckenzie.  $19^{12}$ . Active tectonics of the Alpine-Himalayan Belt between western Turkey and Pakistan. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 100 - 100. **DOI** 100,1111/j.1710-121X.1902.tb.1971.x

Lei, X., and K. Kusunose. 1999. Fractal structure and characteristic scale in the distributions of earthquake epicentres, active faults and rivers in Japan. *Geophysical Journal International*, **\*9**:  $V \circ \xi = V \uparrow Y$ . **DOI** 1.,  $1 \cdot \xi \uparrow / j$ .  $V \neg \xi = X \downarrow X$ .

Mandelbrot, B.B. 1947. The Fractal Geometry of Nature. W.H. Freeman and Company, New York..

Masoudi, P., Y. Asgarinezhad, and B. Tokhmechi. Y. Yo. Feature selection for reservoir characterisation by Bayesian network. *Arabian Journal of Geosciences*,  $h: "\cdot")-"\cdot \sharp"$ . **DOI** )., )... V/s)Yo)Y-.)  $\sharp$ -)"T)-V.

Mirzaei, N., M. Gao, and Y.T. Chen. 1997. Seismicity in major seismotectonic provinces of Iran. *Earthquake Research in China*, **4**: 17-17.

Öncel, A.O., and T. Wilson.  $\checkmark \cdot \cdot \checkmark$ . Space-time correlations of seismotectonic parameter and examples from Japan and Turkey preceding the izmit earthquake. *Bulletin Seismological Society of America*,  $\P$ <sup>\*</sup>:  $\Upsilon$ <sup>\*</sup> $\P$ - $\Gamma$ <sup>o</sup> $\cdot$ . **DOI**.  $1 \cdot , 1 \lor \land \circ / \cdot 1 \curlyvee \cdots \land \land \land \land$ 

Ozturk, S.  $\gamma \cdot \gamma \gamma$ . Statistical correlation between b-value and fractal dimension regarding Turkish epicentre distribution. *Earth science research*,  $\gamma \gamma \cdot \gamma \cdot \gamma \cdot \gamma$ .

Pailoplee, S., and M. Choowong.  $1 \cdot 1^{\xi}$ . Earthquake frequency-magnitude distribution and fractal dimension in mainland Southeast Asia. *Earth Planet and Space*,  $11 \cdot 10^{\circ}$ . **DOI**  $1 \cdot 10^{\circ} 10^{\circ}$ .

Richardson, L.F. 1971. The problem of contiguity: An Appendix to Statistics of Deadly Quarrels. *General System Yearbook*, 7: 179-147.

Rodriguez-Iturbe, I., and A. Rinaldo. 1997. *Fractal River Basin (Chance and Self-Organization)*. Cambridge University Press, Cambridge. **DOI** 1.,1.17/1,AAYT.o

Schuller, D.J., A.R. Rao and G.D. Jeong. Y. Y. Fractal characteristics of dense stream networks. *Journal of Hydrology*, Y: Y: 1–17. **DOI** 1., 1.17/S. YY-1792(...). Y90-2

Schwartz, D., and K. J. Coopersmith. 1945. Fault Behavior and Characteristic Earthquakes: Examples from the Wasatch and San Andreas Faults, *Journal of Geophysics Research*. A9: 0141-0194. **DOI** 1.1.174/JB·A9iB·Vp·01A1

Setyawan, B., and B, Sapiie. ۲۰۱۹. Correlation between the fractal of aftershock spatial distribution and active fault on Sumatra. *Natural hazards and earth system sciences*, ۱-۱۱. **DOI** ۱۰, ۵۱۹٤/nhess-۲۰۱۹-۲۱۰ Strogatz, S.H. ۱۹۹٤. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Perseus Books publication, New York.

SukMono, S., M. T. Zen, W. G. A. Kadir, L. Hendrajaya, D. Santoso, and J. Dubios. 1997. Fractal Geometry of the Sumatra Active Fault System and its Geodynamical Implications. *Journal of Geodynamic*, Y: 1-9. **DOI** 1.1.17/.Y75.TY.Y(97)...10-2

Turcotte, D. L. 1947. Fractals and Fragmentation. Geophysics Research, 1: 1971-1977. DOI 1.1.79/JB.91iB.7p.1971

Turcotte, D.L. 1977. Fractal and Chaos in Geology and Geophysics. Cambridge University Press, Cambridge. **DOI** 1.,1.17/CBO97A117917£790

Vernant, P., F. Nilforushan, D. Hatzfeld, M. Abassi, C. Vigney, F. Mason, H. Nankali, J. Martinod, M. Ashtiany, R. Bayer, F. Tavakoli, and J. Chery.  $\gamma \cdot \cdot \epsilon$ . Present day crustal deformation and plate kinematics in Middle East constrained by GPS measurements in Iran and north Oman. *Geophysical Journal International*,  $\gamma \cdot \gamma \cdot \tau$ , DOI  $\gamma \cdot \gamma \cdot \gamma \cdot \tau$ ,  $\gamma \cdot \tau \cdot \epsilon \cdot \tau \cdot \tau \cdot \tau$ .