

## روش بوت استرپ بلوک مجزا در آمار فضایی

نصراله ایران‌پناه و محسن محمدزاده: دانشگاه تربیت مدرس

### چکیده

روش بوت استرپ افرون برای برآورد میزان دقت برآوردگرها، هنگام مشاهدات مستقل کاربرد دارد. برای داده‌های فضایی که بر حسب موقعیت قرار گرفتن آن‌ها در فضای مورد بررسی به یک‌دیگر وابسته هستند، معمولاً روش بوت استرپ بلوک متحرک مورد استفاده قرار می‌گیرد. از آنجا که در این روش مشاهدات مرزی نسبت به سایر مشاهدات امکان کمتری برای حضور در بلوک‌ها دارند، در این مقاله روش بوت استرپ بلوک مجزا معرفی و الگوریتمی برای برآورد میزان دقت برآوردگرها ارائه می‌شود. همچنین کارایی روش بوت استرپ بلوک مجزا با بلوک متحرک در یک بررسی شبیه‌سازی مورد مقایسه عددی قرار گرفته، نشان داده می‌شود برآوردگر اریبی میانگین نمونه‌ای به روش بوت استرپ بلوک مجزا بدون خطا و برآوردگر واریانس آن سازگار است.

### مقدمه

در آمار کلاسیک عموماً فرض می‌شود داده‌های به دست آمده از جامعه، مستقل‌اند. در عمل با موارد زیادی مواجه می‌شویم که داده‌ها وابسته‌اند. داده‌های فضایی [۱] مشاهداتی هستند که وابستگی آن‌ها ناشی از موقعیت‌شان در فضای بررسی شده است و این وابستگی تابعی از فاصله مشاهدات از یک‌دیگر است. اغلب استنباط‌های آمار فضایی مبتنی بر گاوسی بودن میدان تصادفی است، که در عمل ممکن است این شرط برقرار نباشد. در این‌گونه موارد می‌توان از الگوریتم بوت استرپ و بازنمونه‌گیری<sup>۱</sup> از داده‌های فضایی در استنباط استفاده کرد. افرون [۲] روش بوت استرپ را برای داده‌های مستقل ارائه کرد؛ در این روش می‌توان با استفاده از بازنمونه‌گیری داده‌ها، اریبی، واریانس و توزیع برآوردگرها را برآورد کرد. این روش برای داده‌های فضایی به علت وابستگی مشاهدات کاربرد ندارد. هال [۳] دو روش براساس بلوک‌ی کردن مشاهدات و موقعیت‌ها برای حالت خاص داده‌های موزاییک ارائه کرد، که در آن‌ها همبستگی مشاهدات در موقعیت مجاور مرز بلوک‌ها ساختار واقعی ندارد، به این علت هال [۴] کوشیده است این مشکل را با استفاده از نامساوی بن فرونی به نوعی حل کند. بولمان و کونش [۵] و لاهیری [۶] نیز روش بوت استرپ بلوک متحرک<sup>۲</sup> (MBB) را برای داده‌های فضایی ارائه کردند، که در آن ساختار داده‌ها در فضای  $\mathbb{Z}^d$  مورد توجه قرار گرفته است. در این روش نمونه‌ای از مشاهدات

واژه‌های کلیدی: بوت استرپ بلوک مجزا، بوت استرپ بلوک متحرک،  $\alpha$  - اختلاط، شبیه‌سازی مونت کارلو

## ۱-Resampling

## ۲-Moving Block Bootstrap

در بلوک‌های متحرک بازنمونه‌گیری می‌شود، به گونه‌ای که هر مشاهده حداقل در یکی از بلوک‌ها قرار گیرد، اما امکان کمتر مشاهدات مرزی در مقایسه با مشاهدات مرکزی برای حضور در بلوک‌ها موجب اریبی برآوردها می‌شود.

در این مقاله برای رفع این مشکل روش بوت‌استرپ بلوک مجزا<sup>۱</sup> (SBB)، برای داده‌های فضایی معرفی می‌شود، که در آن ابتدا موقعیت‌ها به بلوک‌های یک‌سان افراز می‌شوند، سپس الگوریتم بوت‌استرپ با استفاده از بازنمونه‌گیری بلوک‌های مجزا اجرا می‌شود. برای این منظور، الگوریتم بوت‌استرپ IID در بخش ۲ ارائه می‌شود. در بخش ۳ روش بوت‌استرپ بلوک مجزا ارائه و روش بوت‌استرپ بلوک متحرک معرفی می‌شود. در بخش ۴ خواص برآوردهای اریبی و واریانس میانگین نمونه‌ای به روش بوت‌استرپ بلوک مجزا مورد بررسی قرار می‌گیرد. نتایج حاصل از دو روش بلوک مجزا و متحرک با استفاده از تکنیک شبیه‌سازی در بخش ۵ مورد مقایسه عددی قرار گرفته و در بخش نهایی به بحث و نتیجه‌گیری پرداخته شده است.

## بوت استرپ IID

فرض کنید  $Z \equiv \{Z_1, \dots, Z_n\}$  مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با تابع توزیع تجمعی  $F_\theta$  و کمیت تصادفی مورد نظر  $T = t(Z; F_\theta)$  باشد. روش بوت‌استرپ بر اساس ایده بازنمونه‌گیری از داده‌ها برای تعیین مشخصات توزیع نمونه‌ای  $T$  بدون فرض معلوم بودن  $F_\theta$  است. افرون [۲] الگوریتمی برای برآورد مشخصات توزیع  $T$  به عنوان برآوردها پارامتر مورد نظر  $\theta$  و بر اساس مشاهدات مستقل به صورت زیر پیشنهاد کرد:

(الف) تابع توزیع تجربی  $F_n(z) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(Z_i \leq z)$  را تعیین کنید.

(ب)  $Z^* \equiv (Z_1^*, \dots, Z_n^*)$  را به عنوان نمونه بوت‌استرپ از  $F_n$  به روش نمونه‌گیری تصادفی ساده

باجای‌گذاری از  $Z$  به دست آورید.

(ج) آماره بوت‌استرپ  $T^* = t(Z^*; F_n)$  را محاسبه کنید.

(د) بوت‌استرپ اریبی، واریانس و توزیع  $T$  به ترتیب به صورت:

$$G_*(t) = P(T^* \leq t) \text{ و } Var_*(T^*) = E_*[T^* - E_*(T^*)]^2, \text{ Bias}_*(T^*) = E_*(T^*) - T$$

برآورد می‌شوند، که در آن  $E_*$ ،  $Var_*$  و  $P_*$  به ترتیب امید ریاضی، واریانس و احتمال شرطی بوت‌استرپ به شرط  $Z$  است. اگر  $Bias_*(T^*)$ ،  $Var_*(T^*)$  و  $G_*(t)$  جواب‌های صریحی نداشته باشند، با

استفاده

از

## 1-Separate Block Bootstrap

شبهه سازی مونت کارلو و تکرار  $B$  بار مراحل ب و ج و محاسبه  $T_1^*, \dots, T_B^*$  به ترتیب به صورت:

$$\widehat{Bias}^*(T^*) = \hat{E}_*(T^*) - T$$

$$\widehat{Var}^*(T^*) = \frac{1}{B-1} \sum_{i=1}^B [T_i^* - \hat{E}_*(T^*)]^2$$

$$\hat{G}_*(t) = \frac{1}{B} \sum_{i=1}^B I(T_i^* \leq t)$$

برآورد شوند، که در آن ها  $\hat{E}_*(T^*) = \frac{1}{B} \sum_{i=1}^B T_i^*$  است.

در اغلب تحلیل های نظری بوت استرپ برای  $F_\theta$  و  $T$  شرایطی منظور می شود، به طوری که با افزایش  $n$  توزیع و گشتاورهای  $T^*$  به توزیع و گشتاورهای مجانبی  $T$  میل کند.

## بوت استرپ فضایی

معمولاً میدان تصادفی  $\{Z(s): s \in D\}$  به عنوان مدل آماری برای تجزیه و تحلیل داده های فضایی در نظر گرفته می شود، که در آن  $D$  یک مجموعه اندیس گذار در فضای اقلیدسی  $d \geq 1$  بعدی  $\mathbb{R}^d$  است. فرض کنید ناحیه نمونه گیری  $D_n$  وقتی که  $n \rightarrow \infty$  غیر کران دار باشد. بگیریم  $\tilde{D} \subset \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^d$  یک مجموعه باز هم بند شامل مبدأ و  $D_o$  یک مجموعه نمونه اولیه برای نواحی نمونه گیری با شرط  $\tilde{D} \subset D_o \subset cl(\tilde{D})$  باشد، که در آن  $cl(\tilde{D})$  بستار مجموعه  $\tilde{D}$  است. همچنین با فرض آن که  $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$  یک دنباله صعودی از اعداد حقیقی بزرگ تر از یک باشد، ناحیه نمونه گیری  $D_n$  با تکثیر مجموعه نمونه اولیه  $D_o$  و ثابت مقیاس بندی  $\lambda_n$  به صورت  $D_n = \lambda_n D_o$  در نظر گرفته می شود. فرض کنید در ناحیه نمونه گیری  $D_n$ ، تعداد  $N_n$  موقعیت محدود  $S_n \equiv \{s_1, \dots, s_{N_n}\}$  از یک میدان تصادفی مانای  $\{Z(s): s \in \mathbb{Z}^d\}$  به صورت یک شبکه منظم مشاهده شده است. اندازه نمونه  $N_n$  و حجم ناحیه نمونه گیری  $D_n$  به صورت:

$$N_n = Vol.(D_o) \cdot \lambda_n^d \quad (1)$$

با هم در ارتباط هستند. با قرار دادن  $N = N_n$ ، فرض کنید  $T_n = t_n(Z_n)$  برآوردگر پارامتر  $\theta$  باشد، که در آن  $Z_n = (Z(s_1), \dots, Z(s_N))$  یک نمونه از مشاهدات است. هدف تعیین مشخصات توزیع نمونه ای  $T_n$  به

روش بوت‌استرپ بلوک فضایی است. در این بخش روش جدید بوت‌استرپ بلوک مجزا معرفی شده و با استفاده از نمادهای آن روش بلوک متحرك نیز بیان می‌شود.

### ۱- بوت‌استرپ بلوک مجزا

فرض کنید  $\{\beta_n\}_{n \geq 1}$  يك دنباله از اعداد صحیح مثبت باشد، به طوری که:

$$\beta_n^{-1} + \lambda_n^{-1} \beta_n = o(1) \quad (۲)$$

یعنی  $\beta_n$  با نرخ آهسته‌تری از عامل مقیاس‌بندی  $\lambda_n$  برای ناحیه نمونه‌گیری  $D_n$  به بی‌نهایت میل کند.  $\beta_n$  عامل مقیاس‌بندی برای بلوک‌ها یا زیر نواحی در روش بوت‌استرپ بلوک فضایی است. ابتدا ناحیه نمونه‌گیری  $D_n$  را با استفاده از مکعب‌های  $\beta_n^d$  افراز می‌کنیم. گیریم  $K_n = \{k \in \mathbb{Z}^d : \beta_n(k+U) \cap D_n \neq \emptyset\}$  مجموعه اندیس مکعب‌های  $\beta_n(k+U)$  باشد که اشتراك غیر تهی با ناحیه نمونه‌گیری  $D_n$  دارد و در آن  $U = [0,1]^d$  مکعبی واحد در  $\mathbb{R}^d$  است. با فرض  $N = \beta_n^d |K_n|$ ، ناحیه نمونه‌گیری  $D_n$  با مکعب‌های  $\beta_n^d$  و تعداد  $|K_n|$  کامل می‌شود. سپس برای هر  $k \in K_n$ ، نمونه بوت‌استرپ را در زیر ناحیه  $k$  ام به صورت:

$$D_n(k) \equiv \beta_n(k+U) \cap D_n \quad (۳)$$

در نظر می‌گیریم  $I_n = \{i \in \mathbb{Z}^d : \beta_n(i+U) \subset D_n\}$  مجموعه اندیس مکعب‌های مجزا به حجم  $\beta_n^d$  در  $D_n$  با نقاط شروع  $i \in \mathbb{Z}^d$  باشد، در نتیجه  $\{\beta_n(i+U) : i \in I_n\}$  يك مجموعه از زیر نواحی یا بلوک‌های مکعبی مجزا واقع در  $D_n$  هستند. فرض کنید  $Z_n(D_n) = \{Z(s_1), \dots, Z(s_N)\}$  نمونه کامل و  $Z_n(D_n(k))$  زیر نمونه قرار گرفته در زیر ناحیه  $D_n(k)$  باشد. برای به دست آوردن يك نمونه بوت‌استرپ بلوک مجزای فضایی، ابتدا برای هر  $k \in K_n$  يك بلوک به صورت تصادفی از مجموعه  $\{\beta_n(i+U) : i \in I_n\}$  و مستقل از بلوک‌های دیگر انتخاب می‌کنیم. سپس با استفاده از مشاهدات در زیر ناحیه باز نمونه‌گیری شده، نمونه بوت‌استرپ را روی زیر ناحیه  $D_n(k)$  تعیین می‌کنیم. سرانجام، فرض کنید  $K = K_n$  اندازه مجموعه  $K_n$  و همچنین  $\{I_k : k \in K_n\}$  يك مجموعه از  $K$  متغیر  $iid$  با توزیع مشترك

$$P(I_1 = i) = \frac{1}{|I_n|}, \quad i \in I_n$$

باشد. برای هر  $k \in K_n$  زیر نمونه بوت‌استرپ بلوک مجزای  $Z_n^*(D_n(k))$  را با استفاده از بلوک باز نمونه‌گیری شده  $Z_n(\beta_n[I_k + U])$  به صورت:

$$Z_n^*(D_n(k)) = Z_n(\beta_n [I_k + U] \cap [D_n(k) - k\beta_n + I_k \beta_n])$$

به دست می‌آوریم. حال نمونه بوت استرپ بلوک مجزا  $Z_n^*(D_n)$  را از به هم پیوستن بلوک‌های باز نمونه‌گیری شده  $\{Z_n^*(D_n(k)) : k \in K_n\}$  تعیین و نسخه بوت استرپ بلوک مجزای آماره  $T_n = t_n(Z_n)$  را به صورت  $T_n^* = t_n(Z_n^*(D_n))$  تعریف می‌کنیم. در واقع نمونه بوت استرپ بلوک مجزای  $Z_n^*(D_n)$  یک نمونه تصادفی ساده با جای‌گذاری به حجم  $K$  از بلوک‌های مکعبی مجزای  $Z_n^*(D_n(k))$  به حجم  $\beta_n^d$  است. ادامه روش مانند مرحله (د) بوت استرپ IID است.

## ۲- بوت استرپ بلوک متحرك

بولمان و کونش [۵] و لاهیری [۶] روش بوت استرپ بلوک متحرك یا متداخل را برای برآورد مشخصات توزیع  $T_n$  ارائه کردند. فرض کنید زیر نواحی  $D_n(k)$  افزاز ناحیه نمونه‌گیری  $D_n$  داده شده در (۳) به صورت مکعب‌هایی به حجم  $\beta_n^d$  باشد. در این روش ابتدا با استفاده از مجموعه مکعب‌های  $J_n = \{j \in \mathbb{Z}^d : (j + \beta_n U) \subset D_n\}$  که متداخل هستند،  $K$  متغیر تصادفی iid  $\{J_k : k \in K_n\}$  با توزیع مشترک  $P(J_1 = j) = \frac{1}{|J_n|}$ ،  $j \in J_n$  تولید می‌شود. سپس زیر نمونه بوت استرپ بلوک متحرك به صورت:

$$Z_n^{**}(D_n(k)) = Z_n([J_k + \beta_n U] \cap [D_n(k) - k\beta_n + J_k])$$

به دست می‌آید. حال نسخه بوت استرپ بلوک متحرك آماره  $T_n$  به صورت  $T_n^{**} = t_n(Z_n^{**}(D_n))$  تعریف می‌شود، که در آن  $Z_n^{**}(D_n)$  از به هم پیوستن بلوک‌های باز نمونه‌گیری شده  $Z_n^{**}(D_n(k))$  تعیین می‌شوند. در واقع نمونه بوت استرپ بلوک متحرك  $Z_n^{**}(D_n)$  یک نمونه تصادفی ساده با جای‌گذاری به حجم  $K$  از بلوک‌های مکعبی متداخل  $Z_n^{**}(D_n(k))$  به حجم  $\beta_n^d$  است.

## خواص برآوردگرهای بوت استرپ اریبی و واریانس میانگین نمونه‌ای

فرض کنید برای میدان تصادفی مانای  $\{Z(i) : i \in \mathbb{Z}^d\}$ ، میانگین نمونه‌ای  $\bar{Z}_n = N^{-1} \sum_{i=1}^N Z(s_i)$  به عنوان برآوردگر میانگین میدان تصادفی  $[Z(\cdot)]$ ،  $\mu = E[Z(\cdot)]$ ، براساس مشاهدات  $Z_n$  باشد. اگر میانگین نمونه‌ای بوت استرپ بلوک مجزا باشد، در این صورت برآورد بوت استرپ پارامتر  $Bias(\bar{Z}_n) = E(\bar{Z}_n) - \mu = 0$  به صورت  $Bias_*(\bar{Z}_n^*) = E_*(\bar{Z}_n^*) - \bar{Z}_n$  تعیین می‌شود. **لم ۱:** روش بوت استرپ بلوک مجزا، اریبی میانگین نمونه‌ای از یک میدان تصادفی مانای  $\{Z(i) : i \in \mathbb{Z}^d\}$  را بدون خطا برآورد می‌کند.

**اثبات:** مجموعه‌های  $S_n^*(k) = \sum_{j \in B_n(i;k)} Z^*(j)$  و  $S_n(i;k) = \sum_{j \in B_n(i;k)} Z(j)$  که در آن‌ها  $B_n(i;k) \equiv D_n(k) - k\beta_n + i\beta_n$ ،  $i$  امین بلوک نوع  $k$  است ( $k \in K_n, i \in I_n$ ) را در نظر بگیرید. به دلیل شانس حضور یکسان مشاهدات در بلوک‌های مجزای  $\{\beta_n(i+U): i \in I_n\}$  و با توجه به  $|K_n| = |I_n|$  داریم:

$$\begin{aligned} E_*(\bar{Z}_n^*) &= E_* \left[ N^{-1} \sum_{k \in K_n} S_n^*(k) \right] \\ &= N^{-1} |K_n| E_* [S_n^*(\cdot)] \\ &= N^{-1} |K_n| |I_n|^{-1} \sum_{i \in I_n} S_n(i; \cdot) \\ &= N^{-1} \sum_{i=1}^N Z(s_i) = \bar{Z}_n \end{aligned}$$

بنا بر این، در روش SBB ارببی میانگین نمونه‌ای بدون خطا برآورد می‌شود.

در روش MBB برخلاف روش SBB به دلیل امکان نابرابر مشاهدات برای حضور در بلوک‌های متحرک  $\{(j + \beta_n U): j \in J_n\}$  برآورد ارببی میانگین نمونه‌ای همراه با خطاست. برای رفع این مشکل معمولاً با مرکزی کردن آماره به شکل  $T_n = \bar{Z}_n - \mu$  برآورد بوت استرپ آن به صورت  $T_n^* = \bar{Z}_n^* - E_*(\bar{Z}_n^*)$  در نظر گرفته می‌شود.

برآورد بوت استرپ پارامتر  $\sigma_n^2 = N \text{Var}(\bar{Z}_n)$  را می‌توان بر اساس پارامتر اندازه-بلوک  $\beta_n$  به صورت

$$\hat{\sigma}_n^2 = \hat{\sigma}_n^2(\beta_n) = N \text{Var}_*(\bar{Z}_n^*) \quad (۴)$$

تعیین کرد. برای بررسی سازگاری  $\hat{\sigma}_n^2$ ، لازم است ابتدا اندازه وابستگی برای میدان تصادفی تعریف شود. واضح است برای هر دو زیر  $\sigma$ -جبر مستقل  $A$  و  $B$  از  $F$  در یک فضای احتمال  $(\Omega, F, P)$  برای هر  $A \in \mathcal{A}$  و  $B \in \mathcal{B}$ ،  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$  است. اما وقتی  $A$  و  $B$  مستقل نباشند، معمولاً اندازه وابستگی  $A$  و  $B$  با بزرگترین مقدار وابستگی  $\Delta$  به صورت:

$$\alpha(A, B) = \sup \{ |P(A \cap B) - P(A)P(B)| : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B} \}$$

تحت عنوان ضریب وابستگی  $\alpha$ -اختلاط ( $\alpha$ -mixing) تعیین می‌شود. برای میدان تصادفی  $\{Z(s): s \in \mathbb{R}^d\}$  به ازای  $a \geq 0$  و  $b \geq 1$  ضریب  $\alpha$ -اختلاط را به صورت:

$$\alpha(a; b) = \sup \{ \alpha_1(S_1, S_2) : S_1, S_2 \in \mathcal{R}(b), d(S_1, S_2) \geq a \}$$

تعریف می‌کنیم، که در آن  $\mathcal{R}(b)$  گردایه تمام زیر مجموعه‌های  $\mathbb{R}^d$  با حجم  $b$  یا کمتر،

$$d(S_1, S_2) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^d |x_i - y_i| : (x_1, \dots, x_d)' \in S_1, (y_1, \dots, y_d)' \in S_2 \right\}$$

فاصله مجموعه های  $S_1$  و  $S_2$  است و

$$\alpha_1(S_1, S_2) = \sup \left\{ |P(A \cap B) - P(A)P(B)| : A \in \mathcal{F}_Z(S_1), B \in \mathcal{F}_Z(S_2) \right\}$$

است، به طوری که  $\sigma$ -جبر تولید شده توسط متغیر تصادفی  $\{Z(s) : s \in S \cap \mathbb{Z}^d\}$  است.

لم ۲: میدان تصادفی  $\{Y(i) : i \in \mathbb{Z}^d\}$  را با فرض  $E[Y(i)] = 0$  و  $E|Y(i)|^{2q+\delta} < \infty$

برای هر  $i \in \mathbb{Z}^d$  و عددی طبیعی مانند  $q$  و  $\delta \in (0, \infty)$  در نظر بگیرید. فرض کنید

$$\sum_{r=0}^{\infty} (r+1)^{d(2q-1)-1} [\alpha_Y(r; 2q)]^{\delta/(2q+\delta)} < \infty$$

که در آن  $\alpha_Y(\cdot, \cdot)$  ضریب  $\alpha$ -اختلاط  $Y(\cdot)$  است. آنگاه برای هر زیر مجموعه  $A \subset \mathbb{Z}^d$

$$E \left| \sum_{i \in A} Y(i) \right|^{2q} \leq C(q, \delta) \max \left\{ \left[ \sum_{i \in A} (E|Y(i)|^{2+\delta})^{\frac{2}{2+\delta}} \right]^q, \sum_{i \in A} (E|Y(i)|^{2q+\delta})^{\frac{2q}{2q+\delta}} \right\}$$

که در آن ثابت  $C(q, \delta)$  تنها به  $q$ ،  $\delta$  و  $d$  و ضریب  $\alpha$ -اختلاط  $\alpha_Y(\cdot, \cdot)$  بستگی دارد، ولی به زیر

مجموعه  $A$  بستگی ندارد.

**اثبات:** برای اثبات به قضیه ۱.۴.۱.۱ [۷] مراجعه شود.

همان طور که لاهیری [۶] سازگاری برآوردگر واریانس میانگین نمونه‌ای به روش بوت استرپ بلوک

متحرک را نشان داد، این خاصیت برای روش بوت استرپ بلوک مجزا نیز در قضیه زیر اثبات می‌شود.

**قضیه ۱:** فرض کنید میدان تصادفی  $\{Z(i) : i \in \mathbb{Z}^d\}$  مانا با  $E|Z(\cdot)|^{6+\delta} < \infty$  و ضریب  $\alpha$ -اختلاط

$\alpha(a; b) \leq ca^{-\tau_1} b^{\tau_2}$  برای  $a \geq 1$  و  $b \geq 1$  و به ازای عددی نامنفی مانند  $\delta$ ،  $\tau_1 \geq \frac{5d(6+\delta)}{\delta}$  و

$0 \leq \tau_2 \leq \frac{\tau_1}{d}$  باشد. اگر  $\beta_n^{-1} + \lambda_n^{-1} \beta_n = o(1)$  آنگاه

$$\hat{\sigma}_n^2 \xrightarrow{P} \sigma_\infty^2, \text{ as } n \rightarrow \infty$$

که در آن  $\hat{\sigma}_n^2$  در (۴) تعریف شده و

$$\begin{aligned} \sigma_\infty^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} N \text{Var}(\bar{Z}_n) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} E[Z(0) - \mu][Z(i) - \mu]. \end{aligned}$$

**اثبات:** بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض می‌شود  $\mu = 0$ . با توجه به استقلال بلوک‌های باز نمونه‌گیری

شده و  $N = \beta_n^d |K_n|$  داریم

$$\begin{aligned}
N\text{Var}_*(\bar{Z}_n^*) &= N\text{Var}_*\left(N^{-1} \sum_{k \in K_n} S_n^*(k)\right) \\
&= N^{-1} \sum_{k \in K_n} \text{Var}_*[S_n^*(k)] \\
&= \beta_n^{-d} \left[ E_*(S_n^*(\cdot))^2 - (E_*(S_n^*(\cdot)))^2 \right] \\
&\equiv \hat{Q}_{1n} - \hat{Q}_{2n}
\end{aligned} \tag{5}$$

همچنین داریم

$$\begin{aligned}
E(\hat{Q}_{1n}) &= E\left[\beta_n^{-d} E_*(S_n^*(\cdot))^2\right] \\
&= \beta_n^{-d} E[S_n(i, \cdot)]^2 \\
&= \beta_n^{-d} E\left[\sum_{j \in \beta_n U \cap \mathbb{Z}^d} Z(j)\right]^2 \\
&= \sum_{j \in \beta_n U \cap \mathbb{Z}^d} E[Z(0)Z(j)] \rightarrow \sigma_\infty^2 \text{ as } n \rightarrow \infty
\end{aligned} \tag{6}$$

با توجه به لم ۱ داریم

$$\begin{aligned}
E(\hat{Q}_{2n}) &= E\left[\beta_n^{-d} (E_*(S_n^*(\cdot)))^2\right] \\
&= \beta_n^{-d} E\left[N |K_n|^{-1} \bar{Z}_n\right]^2 \\
&= \beta_n^d \text{Var}[\hat{Z}_n(s_0)] \\
&= O(\lambda_n^{-d} \beta_n^d)
\end{aligned} \tag{7}$$

بنا بر روابط (۵) تا (۷) برآوردگر  $\hat{\sigma}_n^2$  ناریب است. با استفاده از لم ۲ برای  $\delta = q = 1$  داریم



$$\begin{aligned}
\text{Var}(\hat{Q}_{1n}) &= \text{Var}\left[\beta_n^{-d} E_*\left(S_n^*(\cdot)\right)^2\right] \\
&= \beta_n^{-2d} \text{Var}\left[\left|I_n\right|^{-1} \sum_{i \in I_n} \left(S_n(i, \cdot)\right)^2\right] \\
&= N^{-2} E\left[\sum_{i \in I_n} \left(S_n(i, \cdot)\right)^2 - E\left(S_n(i, \cdot)\right)^2\right]^2 \\
&= N^{-2} E\left[\sum_{i \in I_n} V_n(i)\right]^2 \\
&\leq N^{-2} |I_n| \max\left\{\left(E|V_n(i)|^3\right)^{2/3} : i \in I_n\right\} \sum_{r=0}^{\infty} (r+1)^{d-1} \alpha(r\beta_n; \beta_n^d)^{1/3} \\
&\leq N^{-2} |I_n| \max\left\{E|S_n(i; 0)|^6 : i \in I_n\right\}^{2/3} \sum_{r=0}^{\infty} (r+1)^{d-1} (r+1)^{-\tau_1/3} \left(\beta_n^{\tau_2 d - \tau_1}\right)^{1/3} \\
&= O\left(N^{-2} |I_n| \left(\beta_n^{3d}\right)^{2/3}\right) \\
&= O\left(\lambda_n^{-d} \beta_n^d\right)
\end{aligned} \tag{۸}$$

• ب

طور مشابه داریم

$$\begin{aligned}
\text{Var}(\hat{Q}_{2n}) &= \text{Var}\left[\beta_n^{-d} \left(E_*\left(S_n^*(\cdot)\right)\right)^2\right] \\
&= \beta_n^{-2d} \text{Var}\left[\beta_n^{2d} \hat{Z}_n(s_0)\right]^2 \\
&= \beta_n^{2d} \text{Var}\left[\hat{Z}_n^2(s_0)\right] \\
&= O\left(\lambda_n^{-2d} \beta_n^{2d}\right)
\end{aligned} \tag{۹}$$

بنا بر روابط (۸) و (۹) وقتی  $n \rightarrow \infty$ ، آنگاه  $\text{Var}(\hat{Q}_{1n}) \rightarrow 0$  و  $\text{Var}(\hat{Q}_{2n}) \rightarrow 0$ . بنا بر این با توجه به ناریبی مجانبی،  $\hat{\sigma}_n^2$  برآوردگر سازگار  $\sigma_\infty^2$  است.

لازم به ذکر است که نحوه تحقق شرایط قضیه ۱ در عمل، در مورد ضریب  $\alpha$  - اختلاط در دخان [۷] مورد بررسی قرار گرفته است.

### مقایسه بوت استرپ بلوک مجزا و متحرك

در این بخش، دو روش SBB و MBB با استفاده از تکنیک شبیه‌سازی مونت کارلو برای داده‌های فضایی (SMS) مورد مقایسه عددی قرار می‌گیرند. فرض کنید  $\{Z(s) : s \in \mathbb{Z}^2\}$  یک میدان تصادفی گاوسی مانای مرتبه دوم با میانگین صفر و هم تغییرنگار نمایی

$$\sigma(h; \theta) = \begin{cases} c_0 + c & h = 0 \\ ce^{-\frac{h}{a}} & h \neq 0 \end{cases}$$

باشد. با فرض  $\theta = (c_0, c, a) = (1, 1, 1)$  و داده‌های فضایی در یک شبکه منظم مستطیلی  $20 \times 30$  ( $N = 600$ ) قرار داشته باشند، با در نظر گرفتن فاصله اقلیدسی بین دو موقعیت، ماتریس کواریانس میدان تصادفی به صورت  $\Sigma = (\sigma(s_i - s_j))$  به دست می‌آید. اگر  $\Sigma^{1/2}$  تجزیه چولسکی<sup>۱</sup> ماتریس  $\Sigma$  به صورت  $\Sigma = \Sigma^{1/2} \times \Sigma^{1/2}$  باشد، یک نمونه تصادفی  $Z_n = (Z(s_1), \dots, Z(s_N))$  از میدان تصادفی را می‌توان به صورت  $Z_n = \Sigma^{1/2} X_n$  به دست آورد. که در آن  $X_n = (X_1, \dots, X_N)$  یک نمونه تصادفی (iid) از توزیع  $N(0, 1)$  است. اگر  $T_n = t_n(Z_n)$  برآوردگر پارامتر  $\theta$  باشد، با تکرار  $B$  بار (به قدر کافی بزرگ) نمونه‌گیری به حجم  $N$  و محاسبه مقادیر  $T_1, \dots, T_B$  می‌توان اریبی، واریانس و توزیع

$$T_n = \sqrt{N} \bar{Z}_n$$

$$\text{Bias}(T_n) \approx \bar{T} - \theta$$

$$\text{Var}(T_n) \approx \frac{1}{B-1} \sum_{i=1}^B (T_i - \bar{T})^2$$

$$G(t) \approx \frac{1}{B} \sum_{i=1}^B I(T_i \leq t)$$

تقریب کرد، که در آن‌ها  $\bar{T} = \frac{1}{B} \sum_{i=1}^B T_i$  است. مقادیر واقعی اریبی و واریانس آماره  $T_n = \sqrt{N} \bar{Z}_n$  که در آن  $\bar{Z}_n$  میانگین نمونه‌ای به عنوان برآوردگر پارامتر  $\theta = \sqrt{N} \mu$  است، برای 10000 بار تکرار نمونه‌گیری به حجم  $N = 600$  محاسبه و در ستون SMS جدول ۱ نشان داده شده است. مقادیر برآورد اریبی

و

#### ۱-Choleski Decomposition

واریانس آماره  $T_n$  به دو روش بوت استرپ بلوک مجزا و متحرک به ترتیب در دو ستون SBB و MBB جدول ۱ نشان داده شده است. برای انجام روش بوت استرپ بلوک فضایی، ناحیه نمونه‌گیری را به صورت  $D_n = [-10, 10] \times [-15, 15]$  با ثابت مقیاس‌بندی  $\lambda_n = 30$ ، اندازه بلوک  $\beta_n = 5$  و مجموعه نمونه اولیه  $D_0 = \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right] \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \subset \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2$  در نظر می‌گیریم. در این دو روش که با استفاده از مجموعه مشاهده

شده  $z_n = \{z(s_1), \dots, z(s_N)\}$  به حجم  $N = 600$  که در یک شبکه منظم مستطیلی  $20 \times 30$  از میدان تصادفی مورد نظر قرار گرفته‌اند، بلوک‌هایی به ابعاد  $5 \times 5$  را به دو صورت مجزا و متحرک در نظر می‌گیریم. برای این منظور ناحیه نمونه‌گیری را به 24 زیرناحیه یا بلوک به صورت

$$D_n(k) = [5k_1, 5k_1 + 5) \times [5k_2, 5k_2 + 5), k = (k_1, k_2)' \in \mathbb{Z}^2, -2 \leq k_1 < 2, -3 \leq k_2 < 3$$

افراز می‌کنیم. در روش SBB، بازنمونه‌گیری از بلوک‌های مجزای

$$\{[5i_1, 5i_1 + 5) \times [5i_2, 5i_2 + 5), i = (i_1, i_2)' \in \mathbb{Z}^2, -2 \leq i_1 < 2, -3 \leq i_2 < 3\}$$

و در روش MBB، بازنمونه‌گیری از بلوک‌های متحرک

$$\{[j_1, j_1 + 5) \times [j_2, j_2 + 5), j = (j_1, j_2)' \in \mathbb{Z}^2, -10 \leq j_1 < 5, -15 \leq j_2 < 10\}$$

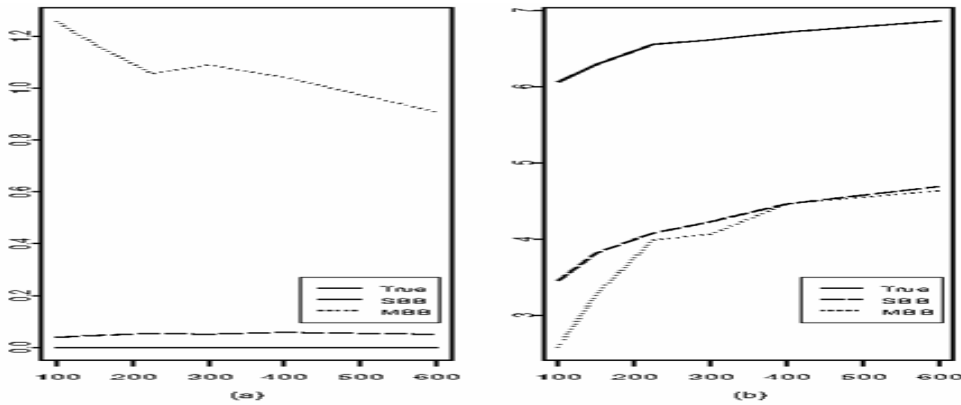
انجام می‌شود. تعداد کل بلوک‌های مجزا و متحرک در این شبکه به ترتیب 24 و 416 است که از بین آن‌ها به روش نمونه‌گیری تصادفی ساده با جایگذاری، 24 بلوک به حجم 25 را انتخاب و از به هم پیوستن آن‌ها یک نمونه بوت‌استرپ  $Z_n^* = \{Z^*(s_1), \dots, Z^*(s_N)\}$  به حجم  $N = 600$  تولید می‌شود. با محاسبه آماره بوت‌استرپ  $T_n^* = \sqrt{N} \bar{Z}_n^*$  و تکرار 2000 بار این الگوریتم،  $T_1^*, \dots, T_{2000}^*$  به دست می‌آید. اریبی و واریانس آماره  $T_n$  با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو به روش بوت‌استرپ برآورد شد.

جدول ۱- مقادیر واقعی اریبی و واریانس آماره و برآورد آن‌ها

اندازه دقت	SMS	SBB	MBB
اریبی	۰/۰۰۰	۰/۰۵۱	۰/۹۰۷
واریانس	۶/۸۶	۴/۷۸	۴/۶۷

همان‌طور که در جدول ۱ ملاحظه می‌شود، روش SBB نسبت به روش MBB مقدار اریبی آماره  $T_n$  را بسیار نزدیک به مقدار واقعی SMS برآورد می‌کند. در حالی که مقدار واریانس برآورد شده آماره  $T_n$  به هر دو روش SBB و MBB تقریباً یکسان و نزدیک به مقدار واقعی SMS است. همچنین برای بررسی خاصیت سازگاری و تأثیر اندازه نمونه  $N$  در برآوردهای اریبی و واریانس آماره  $T_n$  به دو روش SBB و MBB، مقادیر جدول ۱ را به طور مشابه برای اندازه‌های نمونه 100، 150، 225، 300، 400 و 600 در شبکه‌هایی منظم به ترتیب با ابعاد  $10 \times 10$ ،  $10 \times 15$ ،  $15 \times 15$ ،  $15 \times 20$ ،  $20 \times 20$  و  $20 \times 30$  و بلوک‌هایی به ابعاد  $5 \times 5$  محاسبه کرده‌ایم. شکل ۱ مقدار واقعی و برآوردهای اریبی و واریانس میانگین نمونه‌ای دو روش SBB و MBB را به ازای مقادیر مختلف  $N$ ، به ترتیب به صورت خط ممتد، خط چین و نقطه چین نمایش می‌دهد. همان‌طور که در شکل (a) ملاحظه می‌شود، برآورد اریبی به روش SBB تقریباً

بدون خطا، نزدیک مقدار واقعی اریبی است. در حالی که برآورد اریبی به روش MBB همراه با خطاست، ولی با افزایش اندازه نمونه، به مقدار واقعی صفر نزدیک می‌شود. همچنین در شکل ۱(b) ملاحظه می‌شود که برآورد واریانس به روش SBB نسبت به MBB تقریباً نزدیکتر به مقدار واقعی واریانس است و هر دو برآورد با افزایش اندازه نمونه به مقدار واقعی واریانس نزدیک می‌شوند.



شکل ۱- (a) مقادیر واقعی اریبی و برآورد آن‌ها. (b) مقادیر واقعی واریانس و برآورد آن‌ها

چون مقادیر این برآوردها به نمونه مشاهده شده حساس هستند، یعنی با تعویض نمونه مقدار آن‌ها تغییر خواهد کرد، برای مقایسه اندازه‌های دقت دو روش SBB و MBB از ملاک میانگین مربعات خطا (MSE) حاصل از 1000 بار تکرار برآورد بوت‌استرپ اریبی و واریانس آماره  $T_n$  به صورت

$$MSE = \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} [\hat{R}_*(i) - R]^2$$

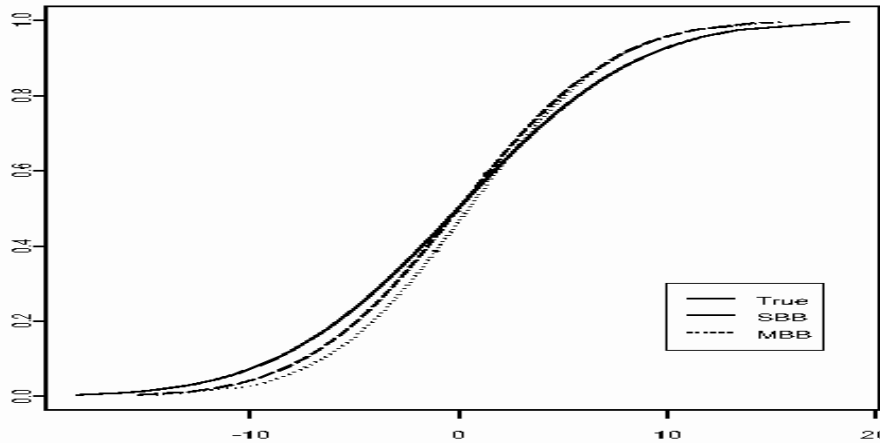
استفاده شده است، که در آن  $R$  مقدار واقعی اندازه دقت آماره  $T_n$  است و  $\hat{R}_*(i)$  نشان دهنده برآورد بوت‌استرپ این اندازه‌ها در تکرار  $i$ ام است. با مقایسه مقادیر MSE برای دو روش SBB و MBB که در جدول ۲ نشان داده شده‌اند، ملاحظه می‌شود که برآورد اریبی به روش SBB نسبت به MBB از دقت بسیار بیشتری برخوردار است، در حالی که دقت برآورد واریانس به هر دو روش SBB و MBB تقریباً یکسان است.

جدول ۲- مقادیر MSE برآوردهای اریبی و واریانس

MBB	SBB	اندازه دقت اریبی
۱/۲۷۳	۰/۰۰۴	

۶/۹۵	۶/۵۱	واریانس
------	------	---------

همچنین مقدار واقعی توزیع آماره  $T_n$  و برآورد آن به دو روش SBB و MBB در شکل ۲ نشان داده شده است. همان طور که ملاحظه می‌شود، برآورد توزیع به روش SBB نسبت به روش MBB تقریباً نزدیک‌تر به مقدار واقعی توزیع نرمال آماره  $T_n$  است.



شکل ۲- توزیع واقعی آماره و برآوردهای بوت‌استرپ آن

### بحث و نتیجه‌گیری

یکی از روش‌های بوت‌استرپ مورد استفاده در داده‌های فضایی بلوک متحرک است، که در آن مشاهدات را در بلوک‌هایی متحرک در نظر گرفته و از آن‌ها باز نمونه‌گیری می‌شود. در این روش مشاهدات مرزی ناحیه نمونه‌گیری نسبت به مشاهدات مرکزی امکان کمتری را برای حضور در بلوک‌ها دارند و این مسئله باعث ایجاد حالت اریبی در برآوردها می‌شود.

در این مقاله برای رفع این مشکل، روش بوت‌استرپ بلوک مجزا ارائه شد، که در آن مشاهدات به بلوک‌های مجزا افراز و باز نمونه‌گیری از این بلوک‌ها انجام می‌شود. نداشتن خطا در برآورد اریبی برآوردگر میانگین نمونه‌ای به روش بوت‌استرپ بلوک مجزا و سازگاری برآوردگر واریانس نشان داده شد. همچنین در یک بررسی شبیه‌سازی نشان داده شد که معیار MSE برای برآورد اریبی به روش بوت‌استرپ بلوک مجزا نسبت به روش بلوک متحرک کاهش چشم‌گیری دارد، در حالی‌که برآورد واریانس به هر دو روش بلوک مجزا و متحرک دقت تقریباً یکسانی دارند. همچنین تأثیر اندازه نمونه و خاصیت سازگاری برآوردگرهای اریبی و واریانس به هر دو روش مورد بررسی شبیه‌سازی قرار گرفت. علت اصلی افزایش دقت برآورد اریبی شانس یک‌سان ظاهر شدن مشاهدات در بلوک‌های مختلف و رفع مشکل نقاط مرزی است. نظر به این‌که فرض محدود کننده مانای میدان تصادفی ممکن است در مسایل کاربردی محقق نباشد، یا برآوردگرهایی غیر از میانگین مورد

نیاز باشند، می‌توان نحوه اجرا و میزان دقت ارائه شده را برای میدان‌های تصادفی نامانا مورد بررسی بیشتر قرار داد.

### منابع

1. N. Cressie, *Statistics for Spatial Data*, John Wiley, New York (1993).
2. B. Efron, *Bootstrap Methods: Another Look at the Jackknife*, *Annals of Statistics*, 7 (1979) 1-26.
3. P. Hall, *Resampling a Coverage Pattern*, *Stochastic Processes and their Application*, 20 (1985) 231-246.
4. P. Hall, *On Confidence Intervals for Spatial Parameters Estimated from Nonreplicated Data*, *Biometrika*, 44 (1988) 271-277.
5. P. Buhlmann and H. R. Kunsch, *Comments on "Prediction of Spatial Cumulative Distribution Functions Using Subsampling"*, *Journal of the American Statistical Association*, 94 (1999) 97-99.
6. S.N. Lahiri, *Resampling Methods for Dependent Data*, Springer-Verlag, New York (2003).
7. P. Doukhan, *Mixing: Properties and Examples*, vol. 85 of *Lecture Notes in Statistics*, Springer-Verlag, New York (1994).