

بازه‌های پیش‌گویی بوت‌استرپ نیم‌پارامتری در سری‌های زمانی

نصراله ایران‌پناه، پریسا میکلائی؛ دانشگاه اصفهان

پذیرش ۹۲/۱۱/۱

دریافت ۹۱/۸/۲۹

چکیده

یکی از مسائل مهم در تحلیل سری‌های زمانی برآورد بازه پیش‌گویی آینده بر اساس مشاهدات گذشته است. در سال‌های اخیر، روش‌های مختلف بوت‌استرپ برای برآورد بازه‌های پیش‌گویی بدون هیچ فرضی در باره توزیع خطاها، ارائه شده است. روش‌های بوت‌استرپ نیم پارامتری بر اساس برازش یک مدل اتورگرسیو بر روی داده‌ها است و نمونه‌های بوت‌استرپ با استفاده از باز نمونه‌گیری از باقی‌مانده‌ها تولید می‌شوند. در این مقاله در ابتدا، روش‌های بوت‌استرپ نیم پارامتری ارائه می‌شوند. سپس در پژوهشی شبیه‌سازی بازه‌های پیش‌گویی بوت‌استرپ نیم‌پارامتری با بازه پیش‌گویی استاندارد مقایسه می‌شوند. در نهایت روش‌های ارائه شده برای برآورد بازه‌های پیش‌گویی آینده داده‌های سری زمانی دمای هوای اصفهان به‌کار می‌روند.

واژه‌های کلیدی: سری زمانی ARMA، بازه‌های پیش‌گویی، بوت استرپ نیم‌پارامتری، شبیه‌سازی مونت کارلو.

مقدمه

افزون روش باز نمونه‌گیری بوت‌استرپ را برای برآورد اندازه‌های دقت آماره‌ها در داده‌های مستقل ارائه داد [۹]. در تحلیل سری‌های زمانی به‌دلیل وجود ساختار وابستگی بین داده‌ها نمی‌توان از روش بوت‌استرپ برای داده‌های مستقل استفاده کرد. برای این منظور، بولمان روش بوت‌استرپ نیم‌پارامتری را بر اساس باز نمونه‌گیری از باقی‌مانده‌های مدل و بدون نیاز به فرض معلوم بودن توزیع باقی‌مانده‌ها ارائه کرد [۷]. کائو و همکاران روش بوت‌استرپ شرطی را برای سری زمانی اتورگرسیو (AR) ارائه کردند [۸]. پاسکال و همکاران روش بوت‌استرپ شرطی کائو و همکاران را برای سری زمانی میانگین متحرک جمع بسته اتورگرسیو آریما^۱ تعمیم دادند [۱۲].

در همه این روش‌ها فرض معلوم بودن مرتبه اتورگرسیو (p) برقرار است. آلونسو و همکاران خواص جانبی پیش‌گویی بوت‌استرپ نیم‌پارامتری را برای رده‌ای از سری‌های زمانی، به‌صورت $AR(\infty)$ ارائه کردند [۱]، [۲]. آن‌ها در پژوهشی شبیه‌سازی بازه‌های پیش‌گویی صدکی بوت‌استرپ نیم‌پارامتری را با روش استاندارد گاوسی و روش ارائه شده در پاسکال و همکاران مقایسه کردند [۱۲]. آلونسو و همکاران روش بوت‌استرپ نیم‌پارامتری با مرتبه درونی را ارائه دادند [۳].

*نویسنده مسئول iranpanah@sci.ui.ac.ir

1. Arima

در این مقاله، ابتدا مراحل مختلف روش بوت‌استرپ نیم‌پارامتری در دو حالت شرطی و غیرشرطی، بوت‌استرپ نیم‌پارامتری با مرتبه درونی و روش ارائه شده پاسکال و همکاران برای محاسبه بازه‌های پیش‌گویی صدکی بوت‌استرپ مشاهدات آینده ارائه می‌شود [۱۲]. سپس خواص جانبی پیش‌گویی به روش بوت‌استرپ نیم-پارامتری بررسی می‌شود. در ادامه شبیه‌سازی روش‌های پیش‌گویی ارائه شده با هم مقایسه می‌شوند و در انتها بازه‌های پیش‌گویی بوت‌استرپ برای سری زمانی داده‌های میانگین سالانه دمای هوای اصفهان محاسبه می‌شود. برنامه‌های مورد نیاز برای بررسی شبیه‌سازی و همچنین تحلیل داده‌های واقعی با استفاده از نرم‌افزار آماری R انجام شده است.

بازه پیش‌گویی بوت‌استرپ

فرض کنید $\{X_t\}_{t \in Z}$ فرآیند مانای میانگین متحرک به صورت $X_t - \mu_x = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j \varepsilon_{t-j}$ باشد، که در آن $\phi_j = 1, \{\varepsilon_t\}_{t \in Z} \text{ i.i.d.}, E[\varepsilon_t] = 0, V[\varepsilon_t] = \sigma^2, E[\varepsilon_t] = \mu_x$ با فرض معکوس‌پذیری می‌توان این فرآیند را به صورت فرآیند اتورگرسیو $\varepsilon_t = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j (X_{t-j} - \mu_x)$ نشان داد که در آن $\sum_{j=1}^{\infty} \phi_j^2 < \infty$ است. مراحل مختلف الگوریتم محاسبه بازه پیش‌گویی بوت‌استرپ نیم‌پارامتری بر اساس نمونه مشاهده شده سری زمانی X_1, \dots, X_n بر اساس روش‌های بوت‌استرپ نیم‌پارامتری (SB) در آلونسو و همکاران [۱]، [۲]، بازه پیش‌گویی بوت‌استرپ نیم‌پارامتری شرطی (CSB) آلونسو و همکاران [۱]، [۲] و بازه پیش‌گویی به روش بوت‌استرپ نیم‌پارامتری با مرتبه درونی (SEOB) در آلونسو و همکاران [۳] بدین صورت است:

۱. بر اساس معیار AICC به صورت $AICC = n \log(\hat{\sigma}^2) + 2(p+1)n/(n-p-2)$ که تصحیح اریبی شده معیار AIC است، ابتدا بر اساس کمترین مقدار AICC در بین مدل‌های مختلف، مرتبه مدل اتورگرسیو برآورد می‌گردد.

۲. با استفاده از معادلات یول والکر به صورت

$$\begin{cases} \rho_1 = \phi_1 & \phi_1 \rho_1 + \dots + \phi_p \rho_{p-1} \\ \rho_2 = \phi_1 \rho_1 + \phi_2 & \dots + \phi_p \rho_{p-2} \\ \vdots & \vdots \\ \rho_p = \phi_1 \rho_{p-1} + \phi_2 \rho_{p-2} & + \dots + \phi_p \end{cases}$$

که در آن γ_k ، کوواریانس بین مقادیر $X_{t-k} - \mu_x$ و $X_t - \mu_x$ از سری زمانی است که با k تأخیر زمانی از هم جدا شدند و اتوکواریانس با تأخیر k نامیده می‌شود و به همین ترتیب $\rho_k = \frac{\gamma_k}{\sigma^2}$ ، خود همبستگی با تأخیر k است.

پارامترهای مدل اتورگرسیو $\phi_p = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p)'$ به صورت $\phi_p = p_p^{-1} y_p$ برآورد می‌شوند که در آن

$$\phi_p = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_p \end{bmatrix} \text{ و } \rho_p = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_p \end{bmatrix}, \gamma_p = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_p \end{bmatrix}$$

۳. باقی‌مانده‌های مدل به صورت $\varepsilon_t = \sum_{j=1}^p \phi_j (x_{t-j} - \bar{x})$ ، $\phi_j = 1, t \in (p+1, \dots, n)$ برآورد می‌شوند.

۴. برآورد باقی‌مانده‌های مدل به صورت $\varepsilon = \varepsilon_t - \varepsilon^{(i)}$ که در آن $\varepsilon^{(i)} = (n-p)^{-1} \sum_{t=p+1}^n \varepsilon_t$ است مرکزی می‌گردند.

۵. باقی‌مانده‌های بوت‌استرپ $\varepsilon_{p+1}^*, \dots, \varepsilon_n^*$ به روش نمونه‌گیری تصادفی ساده با جای‌گذاری از $\varepsilon_{p+1}, \dots, \varepsilon_n$ تولید می‌شوند.

۶. نمونه بوت‌استرپ x_1^*, \dots, x_n^* به ازای $t > p$ از رابطه $\sum_{j=1}^p \varphi_j (X_{t-j}^* - \bar{x}) = \varepsilon_t^*$ و بر اساس $\varepsilon_{p+1}^*, \dots, \varepsilon_n^*$ به دست آمده در مرحله ۵ و به ازای $t \leq p$ به صورت $x_t^* = \bar{x}$ به دست می‌آیند. که در آن x_1^*, \dots, x_p^* برابر با \bar{x} است (برای به دست آوردن نمونه بوت‌استرپ مناسب بر اساس مدل مورد نظر، ابتدا ۱۰۰ نمونه تولید و سپس ۱۰۰ نمونه اول حذف می‌گردد).

۷.

۱-۷. در روش (CSB) بر اساس پارامترهای برآورد شده $\varphi_p = (\varphi_1, \dots, \varphi_p)'$ در مرحله (۲)، پیش‌گویی h گام آینده به صورت $X_{n+h}^* - \bar{x} = \sum_{j=1}^p \varphi_j (X_{n+h-j}^* - \bar{x}) + \varepsilon_{n+h}^*$ محاسبه می‌شود، که در آن برای $X_{n+h-j}^* = x_{n+h-j}^*$ ، $n+h-j \leq n$

۲-۷. در روش (SB) با استفاده از نمونه بوت‌استرپ X_1^*, \dots, X_n^* مرحله (۶) و با تکرار مشابه مرحله (۲)، پارامترهای مدل به صورت $\varphi_p^* = (\varphi_1^*, \dots, \varphi_p^*)'$ برآورد می‌گردند. پیش‌گویی h گام آینده به صورت $X_{n+h}^* - \bar{x} = \sum_{j=1}^p \varphi_j^* (X_{n+h-j}^* - \bar{x}) + \varepsilon_{n+h}^*$ محاسبه می‌گردند، که در آن برای $X_{n+h-j}^* = x_{n+h-j}^*$ ، $n+h-j \leq n$

۳-۷. در روش (SEOB) با استفاده از نمونه بوت‌استرپ X_1^*, \dots, X_n^* و با تکرار مراحل (۱) و (۲)، مرتبه سری زمانی خودبازگشتی P^* و پارامترهای مدل $\varphi_p^* = (\varphi_1^*, \dots, \varphi_p^*)'$ برآورد می‌گردند. پیش‌گویی h گام آینده به صورت $X_{n+h}^* - \bar{x} = \sum_{j=1}^p \varphi_j^* (X_{n+h-j}^* - \bar{x}) + \varepsilon_{n+h}^*$ محاسبه می‌گردند، که در آن برای $X_{n+h-j}^* = x_{n+h-j}^*$ ، $n+h-j \leq n$

مشاهدات h گام آینده به صورت $X_{T+h}^* - \bar{x} = \sum_{j=1}^p \varphi_j^* (X_{T+h-j}^* - \bar{x}) + \varepsilon_{T+h}^*$ محاسبه می‌گردد که در آن برای $X_t^* = x_t$ ، $t \leq T$ است.

۸. در نهایت $F_{x_{T+h}^*}^*(x)$ تابع توزیع بوت‌استرپ نظری x_{T+h}^* ، به عنوان برآورد توزیع x_{T+h} به شرط مشاهدات نمونه در نظر گرفته می‌شود.

۹. برآورد تجربی بوت‌استرپ تابع توزیع $F_{x_{T+h}^*}^*(x)$ ، به روش مونت‌کارلو با استفاده از تکرار B بار مراحل ۵ تا ۸ به صورت $F_{x_{T+h}^*}^{*b}(x) = \#\{X_{T+h}^{*b} \leq x\} / B$ ، $b \in \{1, \dots, B\}$ به دست می‌آید.

۱۰. بازه پیش‌گویی با ضریب $(1-a)100\%$ برای X_{T+h} به صورت $[Q^*(a/2), Q^*(1-a/2)]$ به دست می‌آید که در آن $Q^*(\cdot) = F_{x_{T+h}^*}^{*-1}(\cdot)$ چندک مورد نظر تابع توزیع تجربی بوت‌استرپ است.

در روش ارائه شده پاسکال و همکاران [۱۲]، (PRR) به جای استفاده از تبدیل اتورگرسیو از مدل اصلی سری زمانی استفاده می‌شود. مراحل به دست آوردن بازه پیش‌گویی به روش PRR بر اساس نمونه مشاهده شده y_{T-n+1}, \dots, y_T از سری زمانی آریما (p,d,q) بدین صورت است:

اگر $d = 0$ و $\theta_1, \dots, \theta_q$ و ϕ_1, \dots, ϕ_p برآورد پارامترهای مدل آریما (p,q) بدین صورت باشد:

$$y_t = \phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + \phi_p y_{t-p} + a_t + \theta_1 a_{t-1} + \dots + \theta_q a_{t-q}$$

که در آن $t = T - n + 1, \dots, T$ است. برای به دست آوردن بازه پیش‌گویی به روش PRR در مرحله ۵ الگوریتم بوت‌استرپ نیم‌پارامتری، نمونه بوت‌استرپ a_t^*, \dots, a_{t-q}^* به روش نمونه‌گیری تصادفی ساده با جای‌گذاری

از $\hat{a}_t, \dots, \hat{a}_{t-q}$ تولید می‌شوند و در مرحله ۶ برای محاسبه Y_t^* ها از رابطه

$$Y_t^* = \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1}^* + \dots + \phi_p Y_{t-p}^* + \hat{a}_t^* + \theta_1 \hat{a}_{t-1}^* + \dots + \theta_q \hat{a}_{t-q}^*, \quad t = T - n + 1, \dots, T$$

استفاده می‌شود. در مرحله ۷ با استفاده از نمونه بوت‌استرپ $Y_1^*, Y_2^*, \dots, Y_n^*$ پارامترهای مدل

$\phi_p^* = (\phi_1^*, \phi_2^*, \dots, \phi_p^*)'$ و $\theta_q^* = (\theta_1^*, \dots, \theta_q^*)'$ برآورد می‌گردند. در مرحله ۸ مشاهدات h گام آینده به صورت

$$Y_{T+h}^* = \phi_0^* + \sum_{j=1}^p \phi_j^* Y_{T+h-j}^* + \hat{a}_{T+h}^* + \sum_{j=1}^q \theta_j^* \hat{a}_{T+h-j}^*$$

برای آن محاسبه می‌گردند که در آن $h \leq 0$ ، $Y_{T+h}^* = y_{T+h}$ و $\hat{a}_{T+h}^* = \hat{a}_{T+h}$ است. مدل‌های آریما (p,d,q) که در آن $d \neq 0$ را می‌توان به صورت مدل آریما

$(p+d,q)$ نشان داد. برای مثال مدل $ARI(1,1)$ که به صورت $Y_t = \phi_0 + \phi_1(Y_{t-1} - Y_{t-2}) + a_t$ است. به

صورت مدل $AR(2)$ $t = 1, \dots, T$ در نظر گرفته می‌شود. در مرحله

۶ برای محاسبه Y_t^* ها از رابطه $Y_t^* = \phi_0 + (1 + \phi_1)Y_{t-1}^* - \phi_1 Y_{t-2}^* + \hat{a}_t^*$ استفاده می‌شود. و در مرحله ۸

مشاهدات h گام آینده به صورت $Y_{T+h}^* = \phi_0^* + (1 + \phi_1^*)Y_{T+h-1}^* - \phi_1^* Y_{T+h-2}^* + \hat{a}_{T+h}^*$ برآورد می‌شوند که برای

مراحل محاسبه بازه پیش‌گویی برای مدل‌های $AR(p)$ به روش PRR مانند $Y_{T+h}^* = y_{T+h}$ ، $h \leq 0$

$$\text{الگوریتم ارائه شده است با این تفاوت که در مرحله ۴، } (\varepsilon_t - \varepsilon_t^{(i)}) \text{، } \varepsilon_t = \left(\frac{T-p}{T-2P} \right)^{1/2} \text{ است.}$$

خواص حدی پیش‌گویی بوت‌استرپ

در این بخش خواص حدی برآوردهای مشاهدات آینده به روش CS ارائه شده در بخش ۲ بررسی می‌شود.

برای این منظور فرض‌های ۱ تا ۳ را در نظر می‌گیریم.

فرض ۱: $x_t - \mu_x = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j \varepsilon_{t-j}$ ، $\phi_0 = 1$ ، $t \in \mathbb{Z}$ که در آن

$$s \geq 4, \quad E[|\varepsilon_t|^s] < \infty \text{ و } \{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}} \text{ i.i.d.}, E\{\varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}\} \equiv 0, \quad E\{\varepsilon_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}\} \equiv \sigma^2 < \infty$$

که در آن \mathcal{F}_{t-1} سیگما میدان تولید شده توسط $\{\varepsilon_s\}_{s=-\infty}^{t-1}$ است.

فرض ۲: برای $\phi(z)$ ، $|z| \leq 1$ کراندار و مخالف صفر است.

$$\text{همچنین } \sum_{j=0}^{\infty} j^r |\phi_j| < \infty, r \in \mathbb{N}$$

فرض ۳: اگر $(n \rightarrow \infty)$ آن‌گاه $p = p(n) \rightarrow \infty$ ، $p(n) = o(n)$ و $\varphi_p = (\varphi_{1,n}, \dots, \varphi_{p,n})'$ در معادلات یول

والکر صدق می‌کند.

قضیه: تحت فرض ۱ با $s=4$ و فرض ۲ با $r=1$ و فرض ۳ با $p = o((n/\log n)^{1/4})$ آن‌گاه

$$X_{T+h}^* \rightarrow X_{T+h}$$

اثبات:

بر φ_j برآورد $\varphi_{j,n}$ که در آن $X_{T+h} = -\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j X_{T+h-j} + \varepsilon_{T+h}$ و $X_{T+h}^* = -\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_{j,n} X_{T+h}^* + \varepsilon_{T+h}^*$ اساس نمونه n تایی (x_{T-n+1}, \dots, x_T) است. و برای $j > p(n)$ ، $\varphi_{j,n} = 0$ ، و برای $t \leq T$ ، $x_t^* = x_t$ است.

به‌منظور سهولت در اثبات فرض می‌کنیم $h=1$ است. از لم ۴، ۵ در بوهلمن [۷] نتیجه می‌شود که $\varepsilon_{T+h}^* \xrightarrow{d} \varepsilon_{T+h}$ پس باید ثابت شود تفاوت عبارات‌های اول در X_{T+h}^* و X_{T+h} در احتمال به صفر میل می‌کند. با توجه به فرض $h=1$ تفاوت این دو عبارت بدین‌صورت نمایش داده می‌شود:

$$-\sum_{j=1}^{\infty} (\varphi_{j,n} - \varphi_j) X_{T+h-j} = -\sum_{j=1}^{p(n)} (\varphi_{j,n} - \varphi_j) X_{T+h-j} + \sum_{j=p(n)+1}^{\infty} \varphi_j X_{T+h-j} = S_{\nu,1} + S_{r,1}$$

و $E[|S_{\nu,1}|] \leq E[|x_t|] \sum_{j=p(n)+1}^{\infty} |\varphi_j| = o(p^{-r})$ و نشان داده می‌شود که $S_{\nu,1} = o_p((n/\log(n))^{-r/(r+\nu)})$ بنا بر این $E[|S_{\nu,1}|] \leq E[|x_t|] \sum_{j=p(n)+1}^{\infty} |\varphi_j| = o(p^{-r})$ و نشان داده می‌شود که $S_{\nu,1} = o_p((n/\log(n))^{-r/(r+\nu)})$

$$|S_{\nu,1}| \leq \left| \sum_{j=1}^{p(n)} (\varphi_{j,n} - \varphi_j) x_{T+j-1} \right| + \left| \sum_{j=1}^{p(n)} (\varphi_{j,n} - \varphi_j) x_{T+j-1} \right| = I_\nu + I_r$$

که در آن $\varphi_p = (\varphi_{1,n}, \dots, \varphi_{p,n})^t$ در معادله یول والکر $\Gamma_p \varphi_p = -\gamma_p$ صدق می‌کند.

با استفاده از قضیه ۱، ۲ در هنان و کوالیریز [۱۱] نشان داده می‌شود که

$$\max_{1 \leq j \leq p} |(\varphi_{j,n} - \varphi_j)| = o_{a.s.}((\log(n)/n)^{\nu/2})$$

بنا بر این

$$I_\nu \leq (\sum_{j=1}^{p(n)} (\varphi_{j,n} - \varphi_j)^2)^{\nu/2} (\sum_{j=1}^{p(n)} x_{T+j-1}^2)^{\nu/2} \leq$$

$$p(n)^{\frac{1}{2}} \max_{1 \leq j \leq p} |(\varphi_{j,n} - \varphi_j)| o_p(p(n)^{\frac{1}{2}}) = o_p(p(n)(n/\log(n))^{\nu/2}) = o_p((n/\log(n))^{-r/(r+\nu)})$$

و با استفاده از تعمیم نابری باکستر در هنان و دیستلر [۱۰] نشان داده می‌شود:

$$\sum_{j=1}^{p(n)} |\varphi_{j,n} - \varphi_j| \leq c \sum_{j=p(n)+1}^{\infty} |\varphi_j|$$

$$E[I_r] \leq E[|x_t|] \sum_{j=1}^{p(n)} |\varphi_{j,n} - \varphi_j| = o(p^{-r})$$

و

$$-\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_{j,n} x_{T+h-j} = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j x_{T+h-j} + o_p((n/\log(n))^{-r/(r+\nu)})$$

$$. X_{T+h}^* \xrightarrow{d} X_{T+h}$$

بررسی شبیه‌سازی

در این بخش در یک بررسی شبیه‌سازی مونته‌کارلو دقت بازه‌های پیش‌گویی بوت‌استرپ برای اندازه نمونه و توزیع‌های مختلف باقی‌مانده‌ها برای مدل $MA(1)$ به‌صورت $X_t = \theta/\varphi \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$ ارائه می‌گردند. توزیع باقی‌مانده‌ها به‌صورت $\varepsilon \sim N(0,1)$ و $\varepsilon \sim \exp(-1,1)$ و $\varepsilon \sim \exp(-1,1)$ و $\varepsilon \sim \exp(-1,1)$ و $\varepsilon \sim \exp(-1,1)$ که در آن $F_1 \sim N(-1,1)$ و $F_2 \sim N(9,1)$ در نظر گرفته شده‌اند. مقادیر ارائه شده در جدول‌ها طبق این مراحل محاسبه شده‌اند:

۱. برای مدل $MA(1)$ بر اساس اندازه نمونه و توزیع خطای در نظر گرفته شده، تعداد $R=1000$ مشاهده آینده X_{T+h} تولید می‌شود.

۲. بر اساس الگوریتم ارائه شده در بخش ۲ بازه پیش‌گویی بوت‌استرپ نیم پارامتری به ازای $B=1000$ بار تکرار بوت‌استرپ به صورت $[Q_M^*(\alpha/2), Q_M^*(1-\alpha/2)]$ محاسبه می‌شود. که در آن $M \in \{STG, SB, CDB, SEOB, PRR\}$ است. روش استاندارد گاوسی است، که بازه پیش‌گویی را بر اساس فرض نرمال بودن باقی‌مانده‌ها محاسبه می‌کند.

۳. درصد پوشش به صورت $C_M = \#\{Q_M^*(\alpha/2) \leq X_{T+h}^r \leq Q_M^*(1-\alpha/2)\} / R$ و طول بازه به صورت $L_M = Q_M^*(1-\alpha/2) - Q_M^*(\alpha/2)$ محاسبه می‌شود که در آن r, X_{T+h}^r امین مشاهده تولید شده در مرحله یک است.

۴. با تکرار $m=200$ بار مراحل ۱ الی ۳ میانگین درصد پوشش و طول بازه پیش‌گویی به همراه خطاهای استاندارد و شاخص‌های دیگر بدین صورت است:

$$SE(\bar{L}_M) = (m^{-1}(m-1)^{-1} \sum (L_{M,i} - \bar{L}_M)^2)^{1/2}, \bar{L}_M = m^{-1} \sum L_{M,i}$$

$$SE(\bar{C}_M) = (m^{-1}(m-1)^{-1} \sum (C_{M,i} - \bar{C}_M)^2)^{1/2}, \bar{C}_M = m^{-1} \sum C_{M,i}$$

$$L_T = X_{T+h}^{[R(1-\alpha/2)]} - X_{T+h}^{[R(\alpha/2)]}, \bar{L}_T = m^{-1} \sum L_{T,i}, \bar{C}_T = (1-\alpha)\%$$

در جدول‌های ۱ الی ۳ ستون‌های اول تا ششم به ترتیب شماره مشاهده پیش‌گویی، اندازه نمونه (n) ، روش، میانگین درصد پوشش بازه‌های پیش‌گویی (\bar{C}_M) به همراه خطای استاندارد آن، میانگین درصد‌های غیرپوشش از سمت چپ و راست، میانگین طول بازه‌های پیش‌گویی (\bar{L}_M) به همراه خطای استاندارد آن در ۲۰۰ بار تکرار شبیه‌سازی مونت کارلو و ۱۰۰۰ بار تکرار بوت‌استرپ نشان داده شده است. روش‌های استفاده شده بر اساس ۵ روش $SB, CSB, SEOB, PRR, STG$ است. چنان‌که در جدول‌های ۱ الی ۳ مشخص است تقریباً در همه موارد بازه‌های پیش‌گویی به دست آمده با روش‌های $PRR, SEOB, SB, STG, CSB$ به ترتیب درصد پوشش بیشتری دارند و همچنین درصد پوشش با افزایش اندازه نمونه در تمام روش‌ها بیشتر شده است. بازه پیش‌گویی برای ۳ گام آینده به روش بوت‌استرپ نیم‌پارامتری با مرتبه درونی $(SEOB)$ ، درصد پوشش بیشتر و میانگین طول بازه پیش‌گویی بزرگتری دارد. به طور کلی نتایج به دست آمده نشان می‌دهند روش PRR به دلیل استفاده از مدل اصلی داده‌ها و همچنین روش $SEOB$ به دلیل استفاده از مدل مناسب‌تر بر روی نمونه‌های بوت‌استرپ بر ارزش داده نسبت به روش‌های دیگر، درصد پوشش بیشتری دارند.

مثال میانگین سالانه دمای هوای اصفهان

در این بخش سری زمانی داده‌های میانگین سالانه دمای هوای اصفهان بر حسب درجه سانتی‌گراد از سال ۱۹۵۱ تا ۲۰۰۵ بررسی شده است. در شکل ۱ نمودار این سری زمانی نشان داده شده است. داده‌ها تا سال $pacf$ و acf را نشان می‌دهند. با استفاده از الگوریتم ارائه شده در بخش ۲ بازه پیش‌گویی بر اساس روش‌های $PRR, SEOB, CSB, SB, STG$ برای ۱۰ مشاهده پایانی سری با ضریب اطمینان ۹۵٪ محاسبه شده است.

۱۹۹۵ را به‌عنوان سری مشاهده شده در نظر گرفته شده است که با توجه به‌روند صعودی سری و بررسی نمودارهای acf و $pacf$ همچنین مقایسه مدل، بررسی کفایت مدل و باقی‌مانده‌ها، مدل آریما $(۲, ۱, ۰)$ با $AICC$ برابر با $۱۰۷/۳$ روی داده‌ها برازش داده شد. شکل‌های ۲، ۳ و ۴ به‌ترتیب نمودار مقادیر تفاضل‌گیری شده و

جدول ۱. نتایج شبیه‌سازی برای مدل $MA(۱)$ با خطای نرمال

مشاهده آینده	اندازه نمونه	روش	درصد پوشش (انحراف معیار)	درصد غیر پوشش چپ و راست	میانگین طول بازه (انحراف معیار)
(h)	(n)				
۱	۷۵	T	۹۵	(۲/۵)(۲/۵)	۳/۶۴
		SB	۸۹/۴۵ (۰/۵۱)	(۵/۵)(۵/۰۴)	۳/۸۶ (۰/۰۳)
		SEOB	۹۰/۵۱ (۰/۴۵)	(۵/۰۴)(۴/۴۳)	۳/۹۶ (۰/۰۴)
		CSB	۸۸/۶۵ (۰/۵۸)	(۵/۸۵)(۵/۴۹)	۳/۸۱ (۰/۰۳)
		STG	۸۹/۸۸ (۰/۴۵)	(۵/۱۲)(۴/۹۸)	۳/۸۵ (۰/۰۳)
		PRR	۹۴/۱۷ (۰/۲۸)	(۳/۱۹)(۲/۶۳)	۴/۲۲ (۰/۰۴)
۱	۱۰۰	SB	۹۰/۲۳ (۰/۵۴)	(۵/۷۸)(۳/۹۴)	۳/۹۷ (۰/۰۴)
		SEOB	۹۰/۴۷ (۰/۵۰)	(۵/۶۱)(۳/۹)	۳/۹۷ (۰/۰۴)
		CSB	۸۹/۴۸ (۰/۶۶)	(۶/۱۹)(۴/۳۲)	۳/۹۶ (۰/۰۵)
		STG	۹۰/۱۰ (۰/۴۶)	(۵/۷۶)(۴/۱۲)	۳/۸۵ (۰/۰۳)
		PRR	۹۴/۲۵ (۰/۲۷)	(۳/۰۹)(۲/۶۵)	۴/۲۸ (۰/۰۴)
۳	۷۵	SB	۹۳/۷۳ (۰/۲۶)	(۳/۰۲)(۳/۲۲)	۴/۱۷ (۰/۰۴)
		SEOB	۹۷/۲۰ (۰/۲۸)	(۱/۴۲)(۱/۳۷)	۵/۲۴ (۰/۰۸)
		CSB	۹۳/۴۸ (۰/۲۹)	(۳/۱۶)(۳/۳۵)	۴/۱۵ (۰/۰۴)
		STG	۹۴/۲۷ (۰/۲۲)	(۲/۷)(۳/۰۱)	۴/۱۸ (۰/۰۳)
		PRR	۹۴/۲۷ (۰/۲۵)	(۲/۸۰)(۲/۹۲)	۴/۲۵ (۰/۰۴)
۳	۱۰۰	SB	۹۳/۹۱ (۰/۲۳)	(۳/۱۶)(۲/۹۲)	۴/۲۵ (۰/۰۳)
		SEOB	۹۷/۵۴ (۰/۲۳)	(۱/۲۳)(۱/۲۱)	۵/۳۵ (۰/۰۹)
		CSB	۹۳/۴۶ (۰/۲۴)	(۳/۳۷)(۳/۱۶)	۴/۱۸ (۰/۰۳)
		STG	۹۳/۸۸ (۰/۲۱)	(۳/۰۳)(۳/۰۸)	۴/۱۸ (۰/۰۳)
		PRR	۹۴/۱۸ (۰/۲۴)	(۲/۸۵)(۲/۹۵)	۴/۲۷ (۰/۰۴)

جدول ۲. نتایج شبیه‌سازی برای مدل $MA(1)$ با خطای نمایی

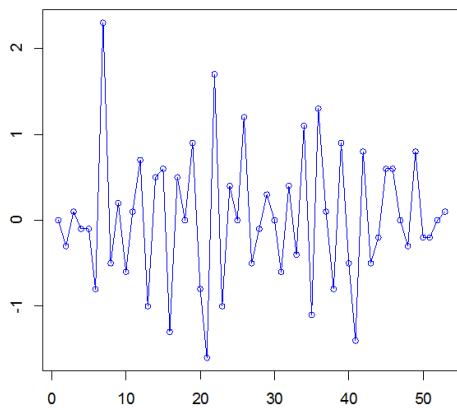
مشاهده	اندازه	روش	درصد پوشش	درصد غیر پوشش	میانگین طول بازه
آینده	نمونه		(انحراف معیار)	چپ و راست	(انحراف معیار)
(h)	(n)				
۱	۷۵	T	۹۵/۰	(۲/۵)(۲/۵)	۴
		SB	۸۹/۰۶ (۰/۹۲)	(۵/۲۸)(۵/۶۵)	۳/۸۱ (۰/۰۸)
		SEOB	۸۹/۷۶ (۰/۸۴)	(۵/۵۴)(۴/۶۸)	۳/۸۵ (۰/۰۸)
		CSB	۸۶/۵۹ (۱/۲۰)	(۵/۴۵)(۷/۹۵)	۳/۷۴ (۰/۰۸)
		STG	۸۹ (۰/۵۲)	(۹/۲۶)(۰/۴۱)	۳/۸۶ (۰/۰۷)
		PRR	۹۵/۷۷ (۰/۳۱)	(۴/۱۱)(۰/۱۱)	۴/۲۱ (۰/۰۹)
۱	۱۰۰	SB	۹۰/۴۶ (۰/۸۰)	(۵/۴۳)(۴/۸۹)	۳/۷۵ (۰/۰۷)
		SEOB	۹۰/۶۴ (۰/۷۴)	(۴/۹۶)(۴/۳۹)	۳/۸۲ (۰/۰۷)
		CSB	۸۷/۴۵ (۱/۱۹)	(۵/۸۴)(۶/۷۰)	۳/۶۷ (۰/۰۷)
		STG	۹۰/۴۵ (۰/۴۵)	(۸/۷۸)(۰/۷۵)	۳/۸۲ (۰/۰۵)
		PRR	۹۵/۹۶ (۰/۲۲)	(۳/۸۹)(۰/۱۴)	۴/۱۰ (۰/۰۶)
۳	۷۵	SB	۹۵/۴ (۰/۳۰)	(۴/۳۹)(۰/۱۹)	۴/۰۲ (۰/۰۶)
		SEOB	۹۷/۵۳ (۰/۲۶)	(۲/۳۸)(۰/۰۸)	۴/۰۶ (۰/۱۰)
		CSB	۹۵/۲۶ (۰/۳۱)	(۴/۳۹)(۰/۳۳)	۴ (۰/۰۶)
		STG	۹۲/۲۷ (۰/۳۱)	(۷/۷۲)(۰)	۴/۰۸ (۰/۰۵)
		PRR	۹۵/۷۱ (۰/۲۱)	(۴/۰۸)(۰/۲۰)	۳/۹۷ (۰/۶۱)
۳	۱۰۰	SB	۹۵/۸۲ (۰/۲۷)	(۳/۹۸)(۰/۱۹)	۴/۲۳ (۰/۰۸)
		SEOB	۹۷/۹۸ (۰/۱۶)	(۱/۹۷)(۰/۰۳)	۵/۳۱ (۰/۱۱)
		CSB	۹۵/۳۹ (۰/۲۸)	(۴/۱۴)(۰/۴۶)	۴/۱۳ (۰/۰۷)
		STG	۹۲/۷۸ (۰/۳۳)	(۷/۲۱)(۰)	۴/۲۴ (۰/۰۶)
		PRR	۹۶/۰۵ (۰/۲۴)	(۳/۷۴)(۰/۲۰)	۴/۱۸ (۰/۰۷)

شکل ۵ بازه پیش‌گویی یک گام آینده برای ۱۰ مشاهده پایانی سری را به دو روش PRR و SEOB را به ترتیب به صورت خط چین و خط ممتد نشان می‌دهد. در شکل ۶ بازه پیش‌گویی برای ۱۰ گام آینده به دو روش SEOB و SB نشان داده شده است که در آن روش SEOB به صورت خط چین نشان داده شده است و طول بازه پیش‌گویی به روش SEOB از روش SB بزرگتر است. شکل ۷ بازه پیش‌گویی به دو روش SB و CSB را نشان می‌دهد که در آن روش CSB به صورت خط چین نشان داده شده است و چنان‌که مشخص است بازه‌های پیش‌گویی به دست آمده با استفاده از این دو روش تقریباً بر هم منطبق هستند. در شکل ۸ بازه‌های پیش‌گویی برای

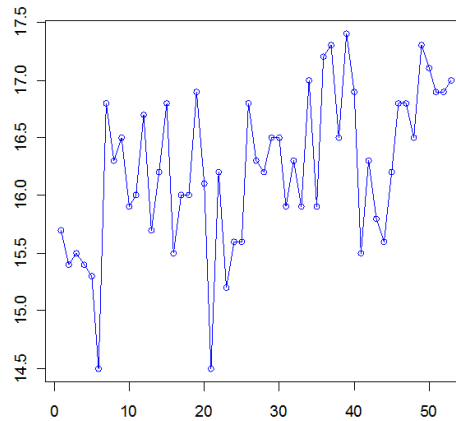
۱ گام آینده به دو روش STG و PRR نشان داده شده است. که در آن بازه پیش‌گویی به‌روش PRR به‌صورت خط چین نشان داده شده است.

جدول ۳. نتایج شبیه‌سازی برای مدل MA(۱) با خطای آمیخته

مشاهده آینده	اندازه نمونه	روش	درصد پوشش (انحراف معیار)	درصد غیر پوشش چپ و راست	میانگین طول بازه (انحراف معیار)
(h)	(n)				
۱	۷۵	T	۹۵/۰	(۲/۵)(۲/۵)	۳/۸
		SB	۹۰/۱۴ (۰/۵)	(۵/۲۵)(۴/۶۰)	۳/۵۳ (۰/۰۴)
		SEOB	۹۰/۲۶ (۰/۴۶)	(۵/۱۴)(۴/۵۹)	۳/۵۲ (۰/۰۳)
		CSB	۸۹/۳۳ (۰/۶۰)	(۵/۷)(۴/۹۶)	۳/۴۹ (۰/۰۴)
		STG	۹۰/۱۳ (۰/۳۹)	(۴/۸۳)(۵/۰۲)	۳/۵۸ (۰/۰۳)
		PRR	۹۴/۱۲ (۰/۲۶)	(۳)(۲/۸۶)	۳/۸۴ (۰/۰۴)
۱	۱۰۰	SB	۹۰/۲۵ (۰/۴۲)	(۵/۹۲)(۳/۸۲)	۳/۵۴ (۰/۰۴)
		SEOB	۹۰/۴۱ (۰/۴۰)	(۵/۸۱)(۳/۷۷)	۳/۵۵ (۰/۰۳)
		CSB	۸۹/۵۸ (۰/۴۶)	(۶/۳۴)(۴/۰۷)	۳/۵۱ (۰/۰۴)
		STG	۸۹/۶۳ (۰/۴۷)	(۶/۰۹)(۴/۲۷)	۳/۴۷ (۰/۰۲)
		PRR	۹۴/۲۳ (۰/۲۷)	(۳/۱۴)(۲/۶۲)	۳/۸۳ (۰/۰۳)
۳	۷۵	SB	۹۳/۲۲ (۰/۳۱)	(۳/۴۲)(۳/۳۵)	۳/۷۸ (۰/۰۴)
		SEOB	۹۷/۰۳ (۰/۳۱)	(۱/۶۴)(۱/۳۲)	۴/۷۰ (۰/۰۷)
		CSB	۹۳/۰۸ (۰/۳۳)	(۳/۵۵)(۳/۳۶)	۳/۷۶ (۰/۰۴)
		STG	۹۴/۰۴ (۰/۲۵)	(۲/۷۹)(۳/۱۶)	۳/۷۷ (۰/۰۳)
		PRR	۹۴/۰۱ (۰/۲۶)	(۲/۹۵)(۳/۰۲)	۳/۸۲ (۰/۰۴)
۳	۱۰۰	SB	۹۴/۵ (۰/۲۶)	(۳)(۲/۵۰)	۳/۸۹ (۰/۰۴)
		SEOB	۹۷/۷۶ (۰/۲۴)	(۱/۲۱)(۱/۰۲)	۴/۹۱ (۰/۰۷)
		CSB	۹۴/۰۴ (۰/۲۷)	(۳/۲۴)(۲/۷)	۳/۸۱ (۰/۰۳)
		STG	۹۴/۵۴ (۰/۲۲)	(۲/۷۷)(۲/۶۸)	۳/۸۱ (۰/۰۲)
		PRR	۹۴/۶۲ (۰/۲۶)	(۲/۸۷)(۲/۵۰)	۳/۸۸ (۰/۰۳)

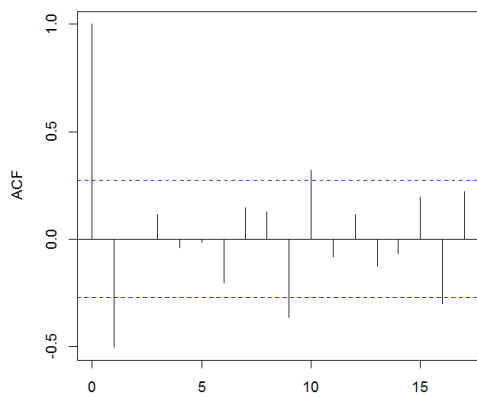


شکل ۲. نمودار سری زمانی داده‌های تفاضل‌گیری



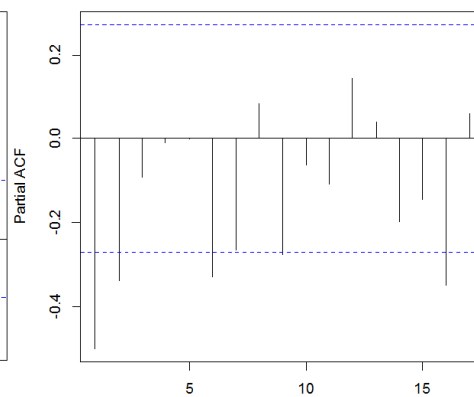
شکل ۱. نمودار سری زمانی داده‌های میانگین سالانه

شده میانگین سالانه دمای هوای اصفهان



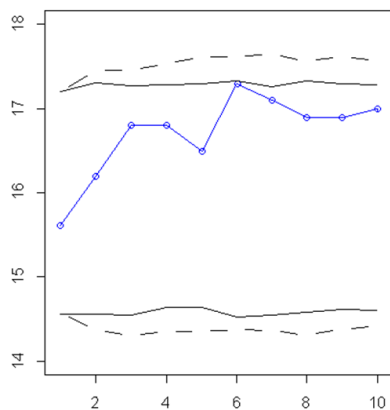
شکل ۴. نمودار acf مقادیر تفاضل‌گیری شده میانگین

دمای هوای اصفهان



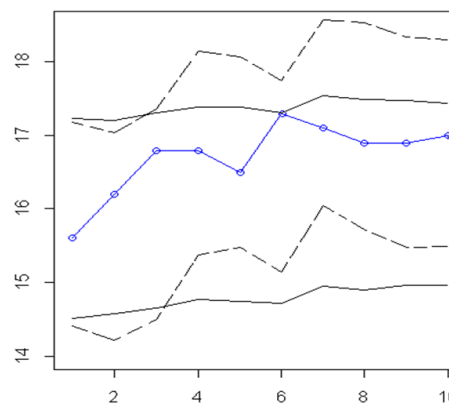
شکل ۳. نمودار pacf مقادیر تفاضل‌گیری شده

سالانه دمای هوای اصفهان



شکل ۶. بازه‌ی پیش‌گویی بوت‌استرپ ۱۰ مشاهده

میانگین سالانه دمای هوای اصفهان

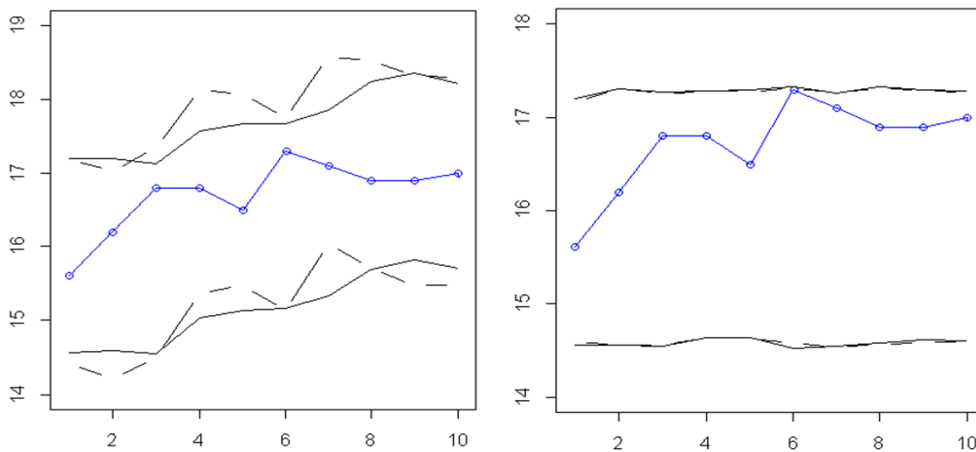


شکل ۵. بازه‌های پیش‌گویی ۱ گام آینده میانگین دمای هوای

پایانی سری میانگین سالانه دمای هوای

اصفهان به روش‌های SEOB (خط‌ممتد) و PRR (خط چین)

اصفهان به روش‌های SB (خط چین) و SEOB (خط ممتد)



شکل ۷. بازه پیش‌گویی بوت‌استرپ ۱۰ مشاهده پایانی
 سری میانگین سالانه دمای هوای اصفهان به‌روش‌های
 SB (خط ممتد) و CSB (خط چین)

شکل ۸. بازه پیش‌گویی ۱۰ مشاهده پایانی سری میانگین
 سالانه دمای هوای اصفهان بر اساس یک گام آینده
 به‌روش‌های STG (خط ممتد) و PRR (خط چین)

نتیجه‌گیری

در تحلیل داده‌های سری‌های زمانی معمولاً فرض نرمال بودن باقی‌مانده‌ها الزامی است. در این مقاله روش بوت‌استرپ برای بازه پیش‌گویی سری‌های زمانی بدون فرض معین بودن توزیع باقی‌مانده‌ها به ۵ روش بوت‌استرپ نیم‌پارامتری در دو حالت شرطی و غیرشرطی و بوت‌استرپ نیم‌پارامتری با مرتبه درونی، روش ارائه شده در پاسکال و همکاران [۱۲] و روش استاندارد گاوسی ارائه شد. سپس خواص جانبی برآورد بوت‌استرپ مشاهده‌ای آینده بررسی شد. همچنین با استفاده از بررسی شبیه‌سازی مونت کارلو روش‌های ارائه شده مقایسه شدند. براساس نتایج به‌دست آمده روش‌های PRR، SEOB بدون در نظر گرفتن فرض معلوم بودن توزیع باقی‌مانده‌ها درصد پوشش بیش‌تری نسبت به روش‌های دیگر داشتند و بازه پیش‌گویی برای ۳ گام آینده به‌روش SEOB، درصد پوشش بیش‌تر و همچنین میانگین طول بازه پیش‌گویی بزرگ‌تری دارد. به‌طورکلی روش PRR به‌دلیل استفاده از مدل اصلی داده‌ها و همچنین روش SEOB به‌دلیل استفاده از مدل اتورگرسیو بر اساس نمونه‌های بوت‌استرپ، درصد پوشش بیش‌تری نسبت به روش‌های دیگر دارد.

منابع

1. Alonso A.M., Peña D., Romo J., "Forecasting time series with sieve bootstrap", Journal of Statistical Planning and Inference, 100 (2002) 1-11.
2. Alonso A.M., Peña D., Romo J., "On sieve bootstrap prediction intervals", Statistics & Probability Letters, 65 (2003) 13-20.

3. Alonso A.M., Peñna D., Romo J., (2004) "Introducing model uncertainty in time series bootstrap", W.P.01-14, Universidad Carlos III de Madrid, Madrid (2004).
4. An H.Z., Chen Z.G., Hannan E.J., "Autocorrelation, autoregression and autoregressive approximations", *Ann. Statist.*, 10 (1982) 926-936.
5. Box G.E.P., Jenkins G.M., "Time Series Analysis: Forecasting and Control", San Francisco: Holden Day (1976).
6. Breidt F.J., Davis R.A., Dunsmuir W.T., "Improved Bootstrap Prediction Intervals for Autoregressions", *J. Time Ser. Anal.*, 16 (1995) 177-200.
7. Bühlmann P., "Sieve bootstrap for time series", *Bernoulli*, 3 (1997) 123-148.
8. Cao R., Delgado M.A., González-Manteiga W., "Nonparametric curve estimation: an overview", *Investigaciones Económicas*, 21 (1997) 209-252.
9. Efron B., "Bootstrap methods: another look at the jackknife", *Ann. Statist.*, 7 (1979) 1-26.
10. Hannan E.J., Deistler M., "The Statistical Theory of Linear Systems", Wiley, New York (1988).
11. Hannan E.J., Kavalieris L., "Regression, autoregression models", *J. Time Ser. Anal.*, 7 (1986) 27-49.
12. Pascual L., Romo J., Ruiz E., "Bootstrap predictive inference for ARIMA processes", W.P. 98-86, Universidad Carlos III de Madrid, Madrid (1998).