

اندازه مکان، اندازه مقیاس و مرتب سازی توزیعهای یک متغیره

عین اله پاشا: دانشگاه تربیت معلم تهران

عادل فاطمی: دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم تحقیقات

چکیده

در این مقاله مفهوم اندازه مکان و مقیاس و تعاریف مربوط به مرتب سازی جزئی برای مقایسه توزیعها ارائه و بررسی می شود، و نیز با استفاده از تحذب مرتبه k ، روابط مرتب سازی تصادفی و پراکندگی ارائه می شوند. و ثابت می شود که اندازه های شناخته ای مانند میانگین و انحراف معیار به ترتیب اندازه های مکان و مقیاس اند. همچنین تابعی از آنتروپی توزیعها را ارائه می کنیم که اندازه مقیاس است و البته این خود ارتباطی جالب میان آنتروپی و واریانس توزیعهای یک متغیره است.

مقدمه

در روابط مرتب سازی، عموماً مجموعه ای از توابع مانند U را در نظر می گیریم به قسمی که به ازای u های متعلق به U ، $Eu(X)$ ویژگی مورد نظر توزیع را اندازه می گیرد. مرتب سازی بر اساس U اینگونه تعریف می شود:

$$X \leq_u Y \quad \text{iff} \quad Eu(X) \leq Eu(Y) \quad \forall u \in U \quad (3-1)$$

U می تواند مجموعه ای از توابع مطلوب باشد.

تعاریف و نمادها

ما توزیع تجمعی F را اکیداً صعودی می گوئیم هرگاه روی مجموعه $S_F = \{x : 0 < F(x) < 1\}$ اکیداً صعودی باشد. در این بررسی ما تنها متغیرهای تصادفی مطلقاً پیوسته و تابع توزیعهای اکیداً صعودی را بررسی می کنیم و منظور از یک مدل، مجموعه ای از تابع توزیعهاست.

تعریف ۱-۲: به ازای عدد طبیعی n و مقادیر حقیقی $y_1, y_2, \dots, y_n$ ، (با همین ترتیب) $S(y_1, y_2, \dots, y_n)$ را برابر تغییر علامت y_i ها تعریف می کنیم، مثلاً اگر $n = 4$ آنگاه $S(-2, 1, 1, 3) = 2$ اما $S(-2, 1, 1, 3) = 1$ همچنین $S(-2, 1, -3, 1) = 3$.

حال فرض کنیم f تابعی حقیقی باشد که روی زیر مجموعه ای از R مانند I تعریف شده، آنگاه

$$S(f) = \sup S[f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)]$$

$\sup$ روی مجموعه $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) | n \in \mathbb{N}, x_1 < x_2 < \dots < x_n, x_i \in I, i = 1, 2, \dots, n\}$ عمل می‌کند.

در حقیقت تابع $S(f)$ تعداد دفعاتی را می‌شمارد که $f(x)$ محور x ها را قطع می‌کند.

مثال ۱-۲: اگر $f(x) = x^2$ ، $-2 \leq x \leq 2$ ، آنگاه $S(f) = 2$ و حال آنکه برای $f(x) = \sin x$ ،

$$-\frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3} \text{ داریم } S(f) = 3.$$

واضح است که اگر $f \geq 0$ یا $f \leq 0$ آنگاه $S(f) = 0$. گوئیم که توابع f و g همدیگر را k مرتبه قطع می‌کنند،

$$S(f-g) = k, k = 0, 1, 2, \dots, \text{ اگر}$$

تعریف ۲-۲: تابع f را محدب مرتبه k گوئیم هرگاه به ازای هر $x \in I$ داشته باشیم:

$$f(x) \leq (\geq) 0,$$

و محدب مرتبه ۱ گوئیم هرگاه به ازای هر $x_1, x_2 \in I$ و $x_1 < x_2$ داشته باشیم:

$$\left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ f(x_1) & f(x_2) \end{array} \right| \geq (\leq) 0.$$

به عبارت دیگر تابع f محدب مرتبه ۱ است هرگاه صعودی و یا نزولی باشد. در حالت کلی تابع f محدب را

مرتبه k گوئیم هرگاه به ازای هر $x_1, x_2, \dots, x_{k+1} \in I$ و $x_1 < x_2 < \dots < x_{k+1}$ داشته باشیم:

$$\left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_1^{k-1} & x_2^{k-1} & \dots & x_{k+1}^{k-1} \\ f(x_1) & f(x_2) & \dots & f(x_{k+1}) \end{array} \right| \geq (\leq) 0. \quad (1-2)$$

اگر k امین مشتق f موجود باشد آنگاه f محدب مرتبه k است اگر و فقط اگر $f^{(k)}(x) \geq (\leq) 0$.

نمادگذاری: فرض F_1 و F_2 دو تابع توزیع باشند، در این صورت:

$$R(x) = R(x; F_1, F_2) = F_2^{-1}(F_1(x)), \quad x \in S_{F_1}$$

$$\Delta(x) = R(x) - x = F_2^{-1}(F_1(x)) - x, \quad x \in S_{F_1}$$

$$\Delta^*(x) = R^{-1}(x) - x = F_1^{-1}(F_2(x)) - x, \quad x \in S_{F_2}$$

$$r(x) = r(x; F_1, F_2) = f_1(x) / f_2(F_2^{-1}(F_1(x))), \quad x \in S_{F_1}$$

که $f_1(x) = \frac{dF_1(x)}{dx}$ و $f_2(x) = \frac{dF_2(x)}{dx}$ به ترتیب چگالی توزیعهای F_1 و F_2 هستند. تابع R ، تابع جالبی است

که مطالعات زیادی بر اساس آن صورت گرفته است. اگر X دارای توزیع F_1 باشد، آنگاه $R(x)$ دارای توزیع F_2

خواهد بود. اگر F_2 توزیعی نمایی با $\lambda = 1$ باشد، آنگاه R تابع خطر است، $R_{(x)} = -\log(1 - F_1(x)) = -\log \bar{F}_1(x)$

و همچنین r تابع میزان از کار افتادگی F_1 است، یعنی $r(x) = R'(x) = \frac{f_1(x)}{F_1(x)}$ شیوه دیگری از نمایش $r(x)$ به صورت زیر است:

$$r(x) = \frac{f_1(x)}{1 - F_1(x)} \times \frac{1 - F_2(R(x))}{f_2(R(x))} = \frac{\frac{f_1(x)}{F_1(x)}}{\frac{f_2(R(x))}{F_2(R(x))}}$$

این نشان می‌دهد که در حالت کلی r خارج قسمت توابع میزان از کار افتادگی F_1 و F_2 است. همچنین این نیز قابل توجه است که $r(F_1^{-1}(U)) = \frac{f_1(F_1^{-1}(U))}{f_2(F_2^{-1}(U))}$ که U دارای توزیع یکنواخت پیوسته روی بازه $[0, 1]$ است. در این حالت آنتروپی توزیع F_1 را نیز می‌توان چنین نوشت:

$$H(F_1) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \log f_1(x) dF_1(x) = -\int_0^1 \log f_1(F_1^{-1}(u)) du \quad (2-2)$$

$$u = F_1(x)$$

تابع $\Delta(x)$ تابع انتقال نیز نامیده می‌شود زیرا وقتی X به اندازه $\Delta(x)$ انتقال داده می‌شود دارای توزیعی مشابه توزیع $Y = \Delta(X) + X$ خواهد بود، که همان F_2 است. حال تعریف زیر را که تعریف مهمی است ارائه می‌دهیم.

تعریف ۲-۳: فرض کنیم X متغیری تصادفی با تابع توزیع F_1 و Y متغیری تصادفی با تابع توزیع F_2 باشد، گوییم $F_2 \leq_k F_1$ یا به طور معادل $X \leq_k Y$ اگر تابع Δ محدب از مرتبه k باشد، $k = 0, 1, 2, \dots$.

اندازه مکان

تعریف ۳-۱: توابع توزیع F_1 و F_2 را از نظر مکان مقایسه پذیر گوییم هرگاه Δ یا Δ^* محدب مرتبه ۰ (یعنی نامنفی) باشند و می‌نویسیم $F_1 \circ F_2$ ، مدل F را مکانی می‌نامیم هرگاه داشته باشیم:

$$\forall F_1, F_2 \in F \Rightarrow F_1 \circ F_2$$

و گوییم F_2 سمت راست F_1 است اگر Δ محدب مرتبه ۰ باشد، یعنی $F_1 \leq F_2$.

رابطه $\circ$ متقارن و بازگشتی است اما انتقالی نیست. واضح است که $F_1 \circ F_2$ اگر و تنها اگر F_1 و F_2 هرگز همدیگر را قطع نکنند، مدل $F = \{F(\circ + a) : a \in R\}$ یک مدل مکانی است، اما همه مدل‌های مکانی اینگونه نیستند. تابع انتقالی Δ محدب مرتبه ۰، $(\Delta(x) \geq 0)$ است اگر و تنها اگر به ازای هر x ، $F_1(x) \geq F_2(x)$. بنابراین مرتب‌سازی $\leq$ همان مرتب‌سازی تصادفی است. رابطه $\leq$ یک مرتب‌سازی جزئی در مدل F است، یعنی بازگشتی، انتقالی و نامتقارن است. اگر F یک مدل مکانی باشد چون که هر دو عضو F در $\leq$ مقایسه پذیرند $(\leq, F)$ یک مجموعه مرتب است.

برای یافتن مرتب‌سازهای دیگری که برای بررسی مکان مناسب به نظر می‌رسند باید مرتب‌سازی‌هایی از

نوع (۱-۱) را مطالعه کنیم. برای این منظور مجموعه توابع زیر را در نظر بگیرید:

$$C_1 = \{u \text{ تابعی صعودی و پیوسته} : u\}$$

$$C_2 = \{\max(\cdot, t) : t \in \mathbb{R}\}$$

$$C_3 = \{\min(\cdot, t) : t \in \mathbb{R}\}$$

قضیه ۱-۳:

$$F_1 \leq F_2 \Leftrightarrow F_1 \leq_{C_1} F_2 \begin{array}{l} \nearrow F_1 \leq_{C_2} F_2 \\ \searrow F_1 \leq_{C_3} F_2 \end{array}$$

برهان: فرض کنیم که $F_1 \leq F_2$ و $u \in C_1$ در این صورت

$$F_1 \leq F_2 \Rightarrow \Delta(x) = F_2^{-1}(F_1(x)) - x \geq 0 \Rightarrow F_2^{-1}(F_1(x)) \geq x$$

$$\Rightarrow F_2^{-1}(t) \geq F_1^{-1}(t),$$

$$\Rightarrow u(F_2^{-1}(t)) \geq u(F_1^{-1}(t)),$$

$$\Rightarrow \int_0^1 u(F_2^{-1}(t))dt \geq \int_0^1 u(F_1^{-1}(t))dt$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} u(z)dF_2(z) \geq \int_{-\infty}^{+\infty} u(z)dF_1(z)$$

$$\Rightarrow Eu(Y) \geq Eu(X) \Rightarrow F_1 \leq_{C_1} F_2$$

مرتب‌سازی‌های $\leq_{C_2}$ و $\leq_{C_3}$ نیز حالت‌های خاصی از مرتب‌سازی $\leq_{C_1}$ اند. برای جهت دیگر به «ستویان

۱۹۷۲» مراجعه شود.

در بخش بعد خواهیم دید که مرتب‌سازی‌های $\leq_{C_2}$ و $\leq_{C_3}$ تنها مکان را اندازه نمی‌گیرد، بلکه مقیاس را نیز

می‌سنجد.

تعریف ۲-۳: تابع $\psi: F \rightarrow \mathbb{R}$ یک اندازه مکان در F است هرگاه:

(الف) برای هر $a, b \in \mathbb{R}$ و $F \in F$ داشته باشیم:

$$\psi(a \times F + b) = a\psi(F) + b$$

(ب) اگر X دارای توزیع F باشد، آنگاه توزیع $aX + b$ را با $a \times F + b$ نشان می‌دهیم.

(پ) اگر $F_1, F_2 \in F$ و $F_1 \leq F_2$ آنگاه $\psi(F_1) \leq \psi(F_2)$.

مثال ۱-۳: F را یک مدل از توزیع‌های با گشتاور اول متناهی در نظر می‌گیریم. یعنی اگر $F \in F$ ، X دارای

توزیع F باشد آنگاه $E(X) < \infty$. در این صورت $\mu(F) = E(X)$ برای این خانواده یک اندازه مکان است زیرا اولاً

برای هر a, b حقیقی و هر F متعلق به F داریم:

$$\mu(a \times F + b) = E(aX + b) = aE(X) + b = a\mu(F) + b$$

ثانیا اگر $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ و $F_1 \leq F_2$ آنگاه به ازای هر x متعلق به S_{F_1} داریم:

$$\begin{aligned} F_1 \leq F_2 &\Rightarrow \Delta(x) = F_2^{-1}(F_1(x)) - x \geq 0 \Rightarrow F_2^{-1}(F_1(x)) \geq x \\ &\Rightarrow F_2^{-1}(t) \geq F_1^{-1}(t), \\ &\Rightarrow \int_0^1 F_2^{-1}(t)dt \geq \int_0^1 F_1^{-1}(t)dt \\ &\Rightarrow E(Y) \geq E(X) \Rightarrow \mu(F_2) \geq \mu(F_1) \end{aligned}$$

اندازه مقیاس

هدف از این بخش پاسخ به این سوال است که کی و چگونه می‌توان دو توزیع را از نظر مقیاس مقایسه کرد. این سوال می‌تواند جوابهای بیشماری داشته باشد که یکی از این جوابها را در اینجا شرح می‌دهیم.

تعریف ۱-۴: تابع توزیعیهای F_1 و F_2 را در مقیاس مقایسه پذیرگوییم هرگاه Δ یا Δ^* محدب از مرتبه ۱ باشند و می‌نویسیم $F_1 \leq_c F_2$. مدل F یک مدل مکانی-مقیاسی است هرگاه به ازای $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ بتوان نتیجه گرفت که $F_1 \leq_c F_2$. گوییم مقیاس F_1 از مقیاس F_2 بزرگتر نیست (یا F_1 از F_2 گسترده‌تر نیست). هرگاه Δ محدب مرتبه ۱ (صعودی) باشد، در این صورت می‌نویسیم: $F_1 \leq_1 F_2$.

به وضوح رابطه c^1 یک رابطه بازگشتی و متقارن است اما انتقالی نیست. مدل $F = \{F(a \circ + b) : a, b \in \mathcal{R}\}$ یک مدل مکانی مقیاسی است، اما همه خانواده‌های مکانی مقیاسی لزوماً از این نوع نیستند. مرتب‌سازی $\leq_1$ همان مرتب‌سازی پراکندگی ($\leq_{disp}$) معرفی شده توسط «بیکل و لهن^۱ (۱۹۷۶)» می‌باشد. آنها چنین بیان کردند که در توزیعیهای F_1 و F_2 که F_1 بیش از F_2 گسترده شده است، برای هر u, v که $0 < u < v < 1$ داریم:

$$F_2^{-1}(v) - F_2^{-1}(u) \geq F_1^{-1}(v) - F_1^{-1}(u) \quad (1-4)$$

(این رابطه به راحتی از محدب مرتبه ۱ بودن $\Delta(x)$ نتیجه می‌شود) یعنی فاصله بین هر دو چنک از توزیع F_2 از فاصله بین چنک‌های متناظر آنها از توزیع F_1 بیشتر باشد. همانطور که گفتیم نامساوی (۱-۴) صادق است اگر و تنها اگر $\Delta(x)$ صعودی باشد. بنابراین مرتب‌سازی $\leq_1$ و $\leq_{disp}$ یکی هستند.

حال بعضی از خواص $\leq_1$ را بررسی می‌کنیم.

تعریف ۲-۴: گوییم $F_1 \approx F_2$ هرگاه $F_1 \leq_1 F_2$ و $F_2 \leq_1 F_1$.

قضیه ۱-۴: رابطه $\leq_1$ انتقالی است و داریم:

$$F_1 \approx_1 F_2 \Rightarrow \exists a : F(\circ) = F_2(\circ + a)$$

برهان: تابع توزیعیهای F_1 و F_2 را در نظر بگیرید به طوری که $F_1 \leq_1 F_2$ و $F_2 \leq_1 F_1$. در این

^۱-Bickel & Lehmann (1976)

صورت توابع

$\Delta_2(x) = R_2(x) - x = F_2^{-1}(F_2(x)) - x$, $\Delta_1(x) = R_1(x) - x = F_2^{-1}(F_1(x)) - x$
توابعی صعودی هستند. یعنی به ازای هر $x_1, x_2 \in S_{F_1}$ و $y_1, y_2 \in S_{F_1}$ به طوری که $x_1 < x_2$ و $y_1 < y_2$ داریم:

$$\Delta_1(x_1) \leq \Delta_1(x_2) \Rightarrow R_1(x_1) - x_1 \leq R_1(x_2) - x_2 \Rightarrow R_1(x_2) - R_1(x_1) \geq x_2 - x_1$$

$$\Delta_2(y_1) \leq \Delta_2(y_2) \Rightarrow R_2(y_1) - y_1 \leq R_2(y_2) - y_2 \Rightarrow R_2(y_2) - R_2(y_1) \geq y_2 - y_1$$

حال $R_2(x)$ را چنین تشکیل می‌دهیم:

$$R_2(x) = R_2(R_1(x)) = F_2^{-1}(F_2(F_2^{-1}(F_1(x)))) = F_2^{-1}(F_1(x))$$

در این صورت به ازای هر $x_1, x_2 \in S_{F_1}$ که $x_1 < x_2$ ، با توجه به دو نامساوی قبلی که به دست آمد داریم:

$$R_2(x_2) - R_2(x_1) = R_2(R_1(x_2)) - R_2(R_1(x_1)) \geq R_1(x_2) - R_1(x_1) \geq x_2 - x_1$$

بنابراین $\Delta_2(x) = R_2(x) - x$ تابعی صعودی است یعنی $F_1 \leq F_2$. بعلاوه $\Delta(x) = (F_2^{-1}(F_1(x)) - x)$

صعودی است اگر و تنها اگر

$$\Delta^*(x) = F_1^{-1}(F_2(x)) - x = -\Delta(F_1^{-1}(F_2(x)))$$

نزولی باشد. بنابراین:

$$F_1 \approx_1 F_2 \Leftrightarrow F_1 \leq_1 F_2 \text{ \& } F_2 \leq_1 F_1$$

$$\Leftrightarrow \Delta(x) \text{ نزولی \& } \Delta(x) \text{ صعودی} \Leftrightarrow \exists a \in R : \Delta(x) \equiv a$$

$$\Leftrightarrow F_2^{-1}(F_1(x)) - x = a \Leftrightarrow F_2^{-1}(F_1(x)) = a + x$$

$$\Leftrightarrow F_1(x) = F_2(a + x).$$

به آسانی می‌توان دید که $F_1 \leq_1 F_2$ اگر و تنها اگر به ازای هر $a \in R$ ، $a \leq S(\Delta(\cdot)) - a$ ، یعنی تابع Δ هیچخطی موازی محور x ها را در بیش از یک نقطه قطع نمی‌کند. و این برقرار است از و تنها اگر $F_1(\cdot)$ و $F_2(\cdot + a)$ همدیگر را حداکثر در یک نقطه قطع کنند.حال ما دو نوع دیگر از مرتب‌سازی مقیاس $\leq^*$ ، $\leq^*$ را تعریف می‌کنیم که از $\leq_1$ ضعیف‌تر بوده و برای

استفاده ساده ترند.

زمانی که $F_1 \leq_1 F_2$ هر سه نوع مرتب‌سازی $\leq_1$ ، $\leq^*$ ، $\leq^{**}$ منطبق هستند، یعنی هم زمان رخ می‌دهندهمچنین مرتب‌سازی $\leq^*$ نسبت به مرتب‌سازی واریانس توزیعیها قوی‌تر است، یعنی:

$$X \leq^*_1 Y \Rightarrow \sigma^*_X \leq \sigma^*_Y$$

تعریف ۳-۴: برای توزیعیهای F_1 و F_2 می‌گوییم که $F_1 \leq^{**}_1 F_2$ هرگاه اعدادی حقیقی مانند a, b باشند که

$$\Delta(x) \geq b; \quad x > a,$$

$$\Delta(x) \leq b; \quad x < a,$$

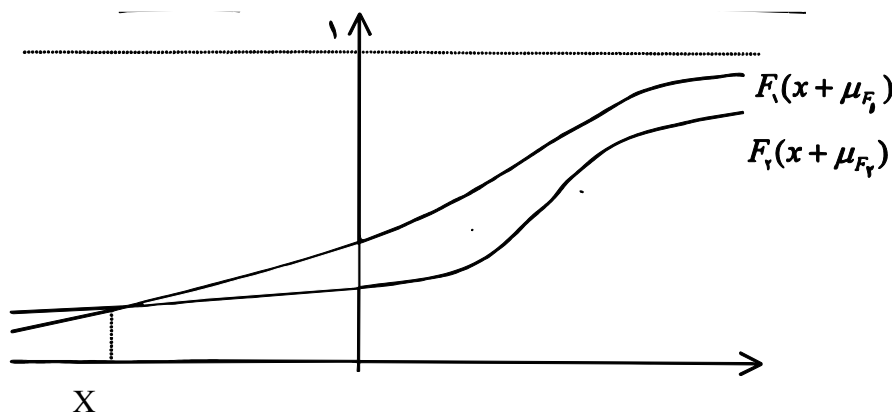
اگر F_1 و F_2 دارای گشتاورهای اول متناهی μ_{F_1} و μ_{F_2} باشند. خواهیم گفت $F_1 \leq^* F_2$ هرگاه عددی حقیقی مانند a باشد که

$$\Delta(x) \geq \mu_{F_1} - \mu_{F_2}; \quad x > a,$$

$$\Delta(x) \leq \mu_{F_1} - \mu_{F_2}; \quad x < a$$

(حالت $\leq^*$ حالتی است از $\leq^{**}$ که a با $\mu_{F_1} - \mu_{F_2}$ جایگزین شده است.) مرتب‌سازی $\leq^{**}$ می‌تواند اینگونه نیز به کار رود:

$F_1 \leq^{**} F_2$ یا $F_2 \leq^{**} F_1$ هرگاه $b \in \mathbb{R}$ وجود داشته باشد، به طوری که $S(F_1(\circ) - F_2(\circ + b)) = 1$. یعنی برای بعضی از b ها تابع توزیعهای $F_1(\circ)$ و $F_2(\circ + b)$ همدیگر را دقیقاً در یک نقطه قطع می‌کنند. به علاوه $F_1 \leq^* F_2$, $F_1 \leq^{**} F_2$ هرگاه $F_1(\circ + \mu_{F_1})$ و $F_2(\circ + \mu_{F_2})$ همدیگر را دقیقاً در یک نقطه قطع کنند. به وضوح در شکل (۱-۴) می‌توان دید که $F_1 \leq^* F_2$ برقرار است، اما $F_1 \leq F_2$ برقرار نیست، زیرا اگر $F_2(\circ + \mu_{F_2})$ را اندکی رو به چپ انتقال دهیم $F_1(\circ + \mu_{F_1})$ را در دو نقطه قطع خواهد کرد و حال آنکه در مرتب‌سازی $\leq^*$ گفتیم که F_1 و F_2 را اگر به هر اندازه انتقال دهیم همدیگر را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کنند.



شکل ۱-۴: حالتی که $F_1 \leq^* F_2$ اما $F_1 \leq F_2$ برقرار نیست

قضیه ۲-۴: روابط زیر برقرارند:

$$F_1 \leq F_2 \quad (\Leftrightarrow F_1 \leq_{\text{disp}} F_2) \Rightarrow F_1 \leq^* F_2 \Rightarrow F_1 \leq^{**} F_2 \quad (\text{الف})$$

ب) اگر F_1 و F_2 از نظر مقیاس قویاً مقایسه پذیر باشند، آنگاه

$$F_1 \leq F_2 \quad (\Leftrightarrow F_1 \leq_{\text{disp}} F_2) \Leftrightarrow F_1 \leq^* F_2 \Leftrightarrow F_1 \leq^{**} F_2$$

برهان: (الف) چون $F_1 \leq F_2$ بنابراین $\Delta(x)$ تابعی صعودی است، پس به ازای هر x_0 دلخواه داریم:

$$X > (<) x_0 \Rightarrow \Delta(x) \geq (>) \Delta(x_0)$$

بالاخص برای $x_0 = \Delta^* \mu_{F_1} - \mu_{F_2}$ و

اگر $x > (<) \Delta^* (\mu_{F_1} - \mu_{F_2}) \Rightarrow \Delta(x) \geq (\leq) \Delta (\Delta^* (\mu_{F_1} - \mu_{F_2})) = \mu_{F_1} - \mu_{F_2}$
 پس کافی است a را برابر $\Delta^* (\mu_{F_1} - \mu_{F_2})$ بگیریم تا داشته باشیم $F_1 \leq^*_{\Delta} F_2$ در رابطه بالا درمورد $\leq^*$
 اگر $a = \Delta^* (\mu_{F_1} - \mu_{F_2})$ و $b = \mu_{F_1} - \mu_{F_2}$ ثابت می‌شود که $F_1 \leq^{**}_{\Delta} F_2$
 (ب) یک طرف این رابطه در قسمت قبل ثابت شد حال برای اثبات طرف دیگر فرض می‌کنیم $F_1 <^{**}_{\Delta} F_2$ و
 فرض کنیم که F_1 و F_2 از نظر مقیاس قویاً مقایسه پذیرند. یعنی $F_1 \leq_{\Delta} F_2$ از اینجا نتیجه می‌شود که Δ تابعی
 یکنواست و از تعریف $F_1 \leq^{**}_{\Delta} F_2$ واضح است که Δ نمی‌تواند نزولی باشد بنابراین صعودی است، پس این
 رابطه درست است.

نتیجه ۴-۱: اگر F یک مدل از توزیعیهای مکانی-مقیاس باشد، آنگاه $\leq^{**}_{\Delta}$ رابطه‌ای انتقالی است و هر دو
 توزیع از F نسبت به رابطه $\leq^{**}_{\Delta}$ مقایسه پذیرند.
 حال دو نوع مرتب‌سازی دیگر از نوع (۱-۱) را که اهمیت زیادی دارند، معرفی می‌کنیم. مجموعه توابع
 زیر را در نظر بگیرید:

$$S_1 = \{ u \text{ صعودی و محدب} : u \},$$

$$S_2 = \{ u \text{ محدب} : u \}$$

به کمک قضیه ۳-۱ و به طور مشابه می‌توان نشان داد که

$$F_1 \leq_{S_1} F_2 \Leftrightarrow F_1 \leq_{S_2} F_2 \Rightarrow F_1 \leq_{S_1} F_2 \quad (۳-۴)$$

حال فرض کنیم F مجموعه انتخاب شده و $\leq$ رابطه مرتب‌سازی مقیاس برای F باشد، اندازه مقیاس را چنین
 تعریف می‌کنیم.

تعریف ۴-۴: تابع $\psi : F \rightarrow R$ یک اندازه مقیاس است هرگاه

الف) برای هر $F \in F$ و $a, b \in R$ داشته باشیم:

$$\psi(a \times F + b) = |a| \psi(F_1)$$

ب) اگر $F_1 \leq F_2$ و $F_1, F_2 \in F$ آنگاه:

$$\psi(F_1) \leq \psi(F_2)$$

قضیه زیر به این سوال پاسخ می‌دهد که چگونه می‌توان یک اندازه مقیاس برای زمانی که از $\leq^*$ استفاده
 می‌کنیم یافت.

قضیه ۴-۳: فرض کنیم F_1 و F_2 توزیعیهای X و Y با امید متناهی μ_{F_1} و μ_{F_2} باشد آنگاه

$$F_1 \leq^*_{\Delta} F_2 \Rightarrow F_1(+\mu_{F_1}) \leq_{S_1} F_2(+\mu_{F_2})$$

$$\Rightarrow F_1(+\mu_{F_1}) \leq_{S_2} F_2(+\mu_{F_2})$$

برهان: فرض کنیم X دارای توزیع F_1 و Y دارای توزیع F_2 باشد به طوری که $F_1 \leq^* F_2$. پس x_0 هست که برای $x_0 < x$ داریم:

$$F_1(x + \mu_{F_1}) \leq (\geq) F_2(x + \mu_{F_2})$$

با توجه به شکل ۱-۳ اگر $t \geq x_0$ آنگاه

$$E_{\max}(X - \mu_{F_1}, t) \leq E_{\max}(Y - \mu_{F_1}, t)$$

و وقتی $t < x_0$ داریم:

$$E_{\max}(X - \mu_{F_1}, t) = t - E_{\max}(X - \mu_{F_1}, t) \leq t - E_{\max}(Y - \mu_{F_1}, t) = E_{\max}(Y - \mu_{F_1}, t)$$

$$\Rightarrow F_1(\circ + \mu_{F_1}) \leq_c F_2(\circ + \mu_{F_2})$$

حال از رابطه (۳-۴) نتیجه می‌شود $F_1(\circ + \mu_{F_1}) \leq_s F_2(\circ + \mu_{F_2})$ نهایتاً رابطه $F_1(\circ + \mu_{F_1}) \leq_s F_2(\circ + \mu_{F_2})$

از «استوین» (۱۹۷۲) نتیجه می‌شود.

نتیجه ۲-۴: انحراف معیار $\sigma_F = [\int (x - \mu_F)^2 dF(x)]^{1/2}$ اندازه مقیاس برای $\leq^*$ می‌باشد. به راحتی می‌توان دید که شرط اول صادق است. شرط دوم نیز از قضیه قبل نتیجه می‌شود. اگر F را مدل مورد نظر با رابطه $\leq^*$ در نظر بگیریم آنگاه به ازای هر $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ داریم $F_1 \leq^* F_2$ یا $F_1 \leq^* F_2$. فرض کنیم $F_1 \leq^* F_2$ آنگاه:

$$F_1 \leq^* F_2 \Rightarrow F_1(\circ + \mu_{F_1}) \leq_s F_2(\circ + \mu_{F_2})$$

$$\Rightarrow \sigma_{F_1}^2 = E(X - \mu_{F_1})^2 \leq E(Y - \mu_{F_2})^2 = \sigma_{F_2}^2 \quad (۴-۴)$$

$$\Rightarrow \sigma_{F_1} \leq \sigma_{F_2}$$

از رابطه (۴-۴) و قضیه ۲-۴ نتیجه می‌شود که انحراف معیار یک اندازه مقیاس برای مرتب‌سازی پراکندگی (یعنی $\leq$) نیز می‌باشد.

بالاخره مطلب قابل اشاره دیگر این است که تابع $\sigma_1(F) = e^{H(F)}$ نیز یک اندازه مقیاس برای مدل $\mathcal{F}$ با مرتب‌سازی پراکندگی $\leq$ می‌باشد. زیرا:

اولاً، اگر X دارای توزیع F باشد، آنگاه

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, F \in \mathcal{F} \quad \sigma_1(a \times F + b) = e^{H(aX + b)} = e^{[a \log |a| + H(X)]} = e^{a \log |a|} e^{H(X)} = |a| \sigma_1(F)$$

و ثانیاً با فرض $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ و $F_1 \leq F_2$ داریم:

$$F_1 \leq F_2 \Leftrightarrow \Delta(x) \Leftrightarrow r(x) \geq 1 \Leftrightarrow \frac{f_1(F_1^{-1}(u))}{f_2(F_1^{-1}(u))} \geq 1$$

$$f_1(F_1^{-1}(u)) \geq f_2(F_1^{-1}(u)) \Leftrightarrow \log f_1(F_1^{-1}(u)) \geq \log f_2(F_1^{-1}(u))$$

$$\Leftrightarrow - \int_0^1 \log f_1(F_1^{-1}(u)) du \leq - \int_0^1 \log f_2(F_1^{-1}(u)) du$$

$$\Leftrightarrow -\int_{-\infty}^{+\infty} \log f_1(x) dF_1(x) \leq -\int_{-\infty}^{+\infty} \log f_2(x) dF_2(x)$$

$$\Leftrightarrow H(F_1) \leq H(F_2) \Leftrightarrow \sigma_1(F_1) \leq \sigma_2(F_2)$$

تشکر و قدردانی

در پایان به جاست از آقای دکتر احسان‌اله صوفی استاد دانشگاه ویسکانسین میلواکی آمریکا به خاطر ارسال تعدادی از مقالات که بسیار مفید و با ارزش بودند سپاسگذاری کنیم.

مراجع

1. P.j. Bickel and E.L. Lehmann, Descriptive Statistics for Nonparametric Models. III. Dispersion, Ann. Statist, Spread, Manuscript, 4 (1976) 1139-1159; IV.
2. E. Ebrahimi, E. Maasoumi, E.S. Soofi, Ordering univariate distributions by entropy and variance. Journal of Econometrics 90 (1999) 317-336.
3. H.on Oja, Location, Scale, Skewness and Kurtosis of Univariate Distributions, Scand. J. Sataist, 8 (1981)154-168.
4. M. Shaked, J.G. Shantikumar, Stochastic Orders and Their Applications, Academic Press, New York(1994).
5. D. Stoyan, Uber Einige Eigenschafton Monoton Stochastischer Prozesse Math, Nachr, 52 (1972) 21-034.