

گروه خودریختی‌های یک $(۱۹, ۱۵, ۳)$ -۲ طرح متقارن

عبدالرضا اسکویی: دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی
 غلامرضا صفا کیش‌همدانی: دانشگاه بوعلی‌سینا همدان
 محمدجواد اسلامپور: دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی

چکیده

در این مقاله گروه خودریختی طرح‌های متقارن با $\lambda = 3$ بررسی شده است، و در حالت خاص، یک $(۱۹, ۱۵, ۳)$ -۲ طرح متقارن که وجود یا عدم آن معلوم نیست در نظر گرفته و ثابت شده است که اگر f یک خودریختی از این طرح باشد، آن گاه $O(f) = 2^a 3^b 5^c 7^d 11^e$. همچنین درباره نقاط ثابت این خودریختی‌ها نتایجی به دست آمده است.

۱- مقدمه

فرض کنید X یک v -مجموعه و $P_i(X)$ مجموعه i -زیر مجموعه‌های X باشند. دوتایی $D = (X, \mathbf{B})$ که در آن $\mathbf{B}$ گردایه‌ای از عناصر $P_k(X)$ (معمولاً بلوک نامیده می‌شوند) است، یک (v, k, λ) -۲ طرح بلوکی (یا به طور خلاصه طرح) می‌نامیم. هرگاه هر عضو از $P_2(X)$ ، λ بار در بلوک‌های $\mathbf{B}$ ظاهر شود، اگر $|\mathbf{B}| = v$ آن گاه طرح را متقارن می‌گوییم. در هر طرح متقارن، دفعات ظهور هر عنصر X در بلوک‌های $\mathbf{B}$ ، برابر با k است.

مثال: قرار دهید $X = \{1, 2, 3, \dots, 7\}$ و

$$\begin{aligned} \mathbf{B}: \quad B_1 &= \{1, 2, 3\} & B_4 &= \{2, 4, 6\} & B_6 &= \{3, 4, 7\} \\ B_2 &= \{1, 4, 5\} & B_5 &= \{2, 5, 7\} & B_7 &= \{3, 5, 6\} \\ B_3 &= \{1, 6, 7\} \end{aligned}$$

ملاحظه می‌شود $D = (X, \mathbf{B})$ ، یک $(7, 3, 1)$ -۲ طرح متقارن است.

نگاشت ψ بین دو طرح $D = (X, \mathbf{B})$ و $D' = (X', \mathbf{B}')$ یک یک‌ریختی نامیده می‌شود، هرگاه $\psi: X \rightarrow X'$ یک تناظر یک به یک باشد به طوری که $\psi(\mathbf{B}) = \mathbf{B}'$.

هر یک‌ریختی از یک طرح D به توی خودش را یک خودریختی می‌نامیم. مجموعه کلیه خودریختی‌های طرح D همراه با عمل ترکیب توابع یک گروه تشکیل می‌دهد که به آن گروه خودریختی‌های طرح می‌گویند.

و با $\text{Aut}(D)$ نمایش داده می‌شود. گروه خودریختی‌های یک طرح، راهی برای یافتن طرح است که محققان زیادی از این طریق طرح‌هایی که قبلاً وجود یا عدم آن‌ها معلوم نبوده یافته‌اند.

فرض کنید $f \in \text{Aut}(D)$ و $D = (X, \mathbf{B})$ تعریف می‌کنیم:

$$\text{fix}(f) = \{x \in X : f(x) = x\},$$

$$\text{مدار } x = (x) = \{f(x) : f \in \text{Aut}(D)\}.$$

به سادگی می‌توان مشاهده کرد که مدارها X را افزاز می‌کنند.

اگر $\alpha \in \text{Aut}(D)$ و D یک (v, k, λ) -۲ طرح متقارن باشد، آن گاه α یک خودریختی روی بلوک‌ها القا می‌کند که با α_B نمایش می‌دهیم. اگر D یک (v, k, λ) -۲ طرح متقارن باشد، آن گاه ارتباط نزدیکی بین α و α_B وجود دارد.

مثال: $(26)(45) = \alpha$ یک خودریختی طرح داده شده در مثال قبل است. با اعمال α روی بلوک‌ها داریم:

$$\alpha_B = (B_4 B_5)(B_1 B_7).$$

قضیه زیر موسوم به لم کشی-فروبنیوس است.

قضیه: اگر G گروه جایگشتی روی X و r تعداد مدارهای آن روی X باشد، آن گاه

$$r = \frac{1}{|G|} \sum_{\alpha \in G} |\text{fix}(\alpha)|.$$

لم زیر تعداد بلوک‌های یک (v, k, λ) -۲ طرح را بر حسب k ، λ و v به دست می‌دهد.

لم ۱ [۴]: در یک (v, k, λ) -۲ طرح $D = (X, \mathbf{B})$ داریم

$$b = |\mathbf{B}| = \lambda \frac{\binom{v}{2}}{\binom{k}{2}}.$$

لم‌های ۲ و ۳ ارتباط بین α و α_B را که α خودریختی یک طرح متقارن است بیان می‌کنند.

لم ۲ [۴]: فرض کنید D یک طرح متقارن و $\alpha \in \text{Aut}(D)$. در این صورت

$$|\text{fix}(\alpha)| = |\text{fix}(\alpha_B)|.$$

لم ۳ [۴]: اگر D یک طرح متقارن و $G \leq \text{Aut}(D)$ ، آن گاه تعداد مدارهای ساخته شده توسط G روی نقاط و بلوک‌ها با هم مساوی‌اند.

لم زیر کران بالایی برای تعداد نقاط ثابت یک خودریختی طرح متقارن ارائه می‌کند که نقش اساسی در ادامه مقاله ایفا می‌کند.

لم ۴ [۲]: فرض کنید D یک (v, k, λ) -۲ طرح متقارن و $\alpha \in \text{Aut}(D)$ غیر همانی باشد. اگر $|\text{fix}(\alpha)| = f$ ،

$$f \leq \begin{cases} \frac{1}{4}(v+3k-6) & o(\alpha) \geq 3, \\ \frac{1}{3}(v+2k-4) & o(\alpha) = 2. \end{cases} \quad \text{آن گاه}$$

لم زیر خاصیت مهمی را در مورد طرح‌های متقارن در رابطه با اشتراک بلوک‌ها بیان می‌کند.

لم ۴: هر دو بلوک یک (v, k, λ) - $\mathcal{P}$ طرح متقارن در λ نقطه مشترکند.

۲- نتایج درباره گروه خودریختی طرح‌های متقارن

در این بخش بعضی از نتایج خودریختی‌هایی از مرتبه عدد اول p یک طرح متقارن را ارائه می‌کنیم. سپس

در باره طرح‌های متقارن با $\lambda=3$ نتایج را بیان می‌کنیم.

در سرتاسر این بخش منظور از D یک (v, k, λ) - $\mathcal{P}$ طرح متقارن $D = (X, \mathbf{B})$ است.

لم ۵: فرض کنید $\alpha \in \text{Aut}(D)$ و $o(\alpha) = p$ یک عدد اول باشد در این صورت

(الف) اگر $B_1, B_2 \in \text{fix}(\alpha_B)$ و $\lambda < p$ و $x \in B_1 \cap B_2$ آن گاه $x \in \text{fix}(\alpha)$

(ب) اگر $x, y \in \text{fix}(\alpha)$ و $\lambda < p$ آن گاه کلیه بلوک‌های شامل x, y ، بلوک ثابت هستند.

(ج) اگر $p > \lambda - 1 > 1$ ، آن گاه برای هر بلوک B ، $B \not\subseteq \text{fix}(\alpha)$.

اثبات:

(الف) اگر $x \notin \text{fix}(\alpha)$ ، آن گاه $\text{orbit}(x) \subseteq B_1 \cap B_2$ و بنا بر این $|B_1 \cap B_2| \geq p > \lambda$ و این تناقض با لم ۵ است.

(ب) چون $x, y \in \text{fix}(\alpha)$ ، بنا بر این اگر $x, y \in B$ ، آن گاه $x, y \in \alpha_B$. اگر $\alpha(B) \neq B$ ، آن گاه مدار

B تحت α شامل حداقل p بلوک است و هر کدام نیز شامل x, y هستند. پس x, y حداقل در p

بلوک ظاهر می‌شوند که این متناقض با $\lambda < p$ است.

(ج) فرض کنید $B \subseteq \text{fix}(\alpha)$. اگر B' یک بلوک D باشد، آن گاه $|B \cap B'| = \lambda > 2$. پس B' شامل

حداقل دو نقطه ثابت است. بنا بر قسمت (ب) B' بلوک ثابت است. پس هر بلوک این طرح تحت α

ثابت باقی می‌ماند. در نتیجه α خودریختی همانی است که خلاف فرض است.

لم ۶: فرض کنید D یک $(v, k, 3)$ - $\mathcal{P}$ طرح متقارن و $\alpha \in \text{Aut}(D)$ از مرتبه عدد اول $p \geq 5$ باشد. اگر بلوک

ثابت B_0 شامل m نقطه ثابت باشد، آن گاه

$$|\text{fix}(\alpha)| = \frac{2}{3} \binom{m}{2} + 1.$$

اثبات: فرض کنید $x_1, x_2, \dots, x_m$ ، نقاط ثابت B_0 باشند. هر بلوک دیگر شامل یک زوج از x_i ها بلوک ثابت است (بنا بر لم ۶). برای هر بلوک ثابت B_i ، داریم $|B_i \cap B_0| = 3$ (بنا بر لم ۵) و

$$B_i \cap B_0 \subseteq \{x_1, \dots, x_m\}$$

$S = \{(\{x_i, x_j\}, B) \mid x_i, x_j \in \{x_1, \dots, x_m\}, x_i, x_j \in B, B \neq B_0\}$.
 $|S|$ را به دو صورت می‌شماریم. هر بلوک ثابت شامل سه عضو از مجموعه $\{x_1, \dots, x_m\}$ است تعداد بلوک‌های ثابت به غیر از B_0 برابر $|fix(\alpha)| - 1$ است. پس $|S| = 3(|fix(\alpha)| - 1)$. از طرف دیگر هر زوج از عناصر مجموعه $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ به غیر از B_0 در دو بلوک ثابت دیگر ظاهر می‌شود. پس $|S| = \binom{m}{2} \times 2$ و در نتیجه $|fix(\alpha)| = \frac{2}{3} \binom{m}{2} + 1$.

لم ۸: با مفروضات لم ۷، تعداد نقاط ثابت کلیه بلوک‌های ثابت D ، برابر با m است.

اثبات: فرض کنید B_1 و B_2 دو بلوک ثابت با تعداد نقاط ثابت m و m' باشند. در این صورت

$$|fix(\alpha)| = \frac{2}{3} \binom{m}{2} + 1 = \frac{2}{3} \binom{m'}{2} + 1$$

در نتیجه $m = m'$.

نتیجه ۱: با مفروضات لم ۷، یک $(|fix(\alpha)|, m, 3)$ -۲ طرح متقارن درون طرح D وجود دارد.

اثبات: قرار دهید $\mathbf{B}' = \{B \cap fix(\alpha) \mid B \in fix(\alpha_B)\}$. با توجه به روند اثبات لم ۸، $\mathbf{B}'$ گردایه‌ای از مجموعه‌های m -عضوی است. با توجه به لم ۸، $\mathbf{B}'$ مجموعه بلوک‌های یک $(|fix(\alpha)|, m, 3)$ -۲ طرح متقارن است.

لم ۹: با مفروضات لم ۷، اگر $o(\alpha)$ مساوی ۲ و یا ۳ باشد، آن گاه

$$|fix(\alpha)| \leq \frac{2}{3} \binom{m}{2} + 1.$$

اثبات: چون در این حالت ممکن است اشتراک دو بلوک ثابت، مجموعه نقاط ثابت نباشند، بنا بر این در روند

اثبات لم ۷، تعداد بلوک‌های ثابت شامل یک زوج از عناصر $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ ، حداکثر $|fix(\alpha)| - 1$ است. از این‌جا مطلوب حاصل می‌شود.

لم ۱۰: با مفروضات لم ۷، $|fix(\alpha)| + |fix(\alpha)|(k - m) \leq v$.

اثبات: چون اشتراک هر دو بلوک ثابت زیرمجموعه‌ای از نقاط ثابت است، پس هر بلوک ثابت دارای $k - m$ نقطه است که در هیچ کدام از بلوک‌های ثابت دیگر ظاهر نمی‌شود. حال شمارش نقاط در بلوک‌های ثابت به نتیجه مطلوب خواهیم رسید.

لم‌های ۷ و ۹، نقش اساسی در بررسی خودریختی‌های از مرتبه عدد اول p یک (v, k, λ) - 2 طرح متقارن بازی می‌کند و در بخش سوم خواهیم دید که نتایج لم ۷ و ۹ نتایج قوی‌تری نسبت به لم ۴ را به دست می‌دهد.

۳- گروه خودریختی یک $(115, 19, 3)$ - 2 طرح متقارن

در این بخش به بررسی گروه خودریختی یک $(115, 19, 3)$ - 2 طرح متقارن می‌پردازیم. وجود یا عدم این طرح هنوز مشخص نشده است [۳]. همان‌طور که در بخش ۱ مطرح کردیم، گروه خودریختی طرح‌ها راهی برای یافتن طرح است. در این بخش، D را یک $(115, 19, 3)$ - 2 طرح متقارن گرفته و خودریختی‌های از مرتبه عدد اول p آن‌ها را بررسی می‌کنیم. فرض کنیم $\alpha \in \text{Aut}(D)$ و $o(\alpha) = p$ عددی اول باشد. بر اساس قضیه‌ای از Aschbacher [۱] که بیان می‌کند اگر α یک خودریختی (v, k, λ) - 2 طرح متقارن از مرتبه عدد اول p باشد، آن گاه $p \mid v$ یا $p \leq k$ داریم،

$$p \in \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}.$$

الف: $o(\alpha) = 17$

در این حالت، بنا بر لم‌های ۱ و ۴، $|fix(\alpha)| \in \{13, 30\}$. اگر B یک بلوک ثابت باشد، آن گاه بنا بر لم‌های ۶ (ج) و ۱۰، B دقیقاً ۲ نقطه ثابت دارد. پس، $|fix(\alpha)| = \frac{2}{3} \binom{2}{2} + 1 = 1$ (لم ۸)، که عدد صحیح نیست. پس $|Aut(D)| \nmid 17$.

ب: $o(\alpha) = 13$

مجدداً بنا بر لم ۴، $|fix(\alpha)| \in \{11, 24\}$. لم ۶ (ج) دلالت بر این دارد که هر بلوک ثابت دارای شش نقطه ثابت است و بنا بر این $|fix(\alpha)| = 11$. نتیجه ۱ دلالت بر این دارد که یک $(11, 6, 3)$ - 2 طرح متقارن درون ساختار این طرح وجود دارد. اما این متناقض با لم ۱۰ است. پس عدد ۱۳ مرتبه گروه خودریختی را عادی نمی‌کند.

ج: $o(\alpha) = 11$

لم ۴ نتیجه می‌دهد که $|fix(\alpha)| \in \{5, 16, 27, 38\}$. که همه موارد مشابه حالت‌های قبل رد می‌شود. پس $|Aut(D)| \nmid 11$.

د: $o(\alpha) = 7$

مجدداً داریم $|fix(\alpha)| \in \{3, 10, \dots, 38\}$. هر بلوک ثابت ۵ یا ۱۲ نقطه دارد. اگر همه بلوک‌ها ۵ نقطه ثابت داشته باشند. در این صورت لم ۸ دلالت دارد که $|fix(\alpha)|$ عدد صحیح نیست. پس بلوکی وجود دارد که ۱۲ نقطه ثابت دارد. در نتیجه بنا به لم ۸، $|fix(\alpha)| = 45$ که غیر ممکن است. پس $|Aut(D)| \nmid 7$.

$$o(\alpha) = 5: \text{ه}$$

در این جا $|\text{fix}(\alpha)| \in \{0, 5, \dots, 40\}$ که همه حالت‌ها به جز $|\text{fix}(\alpha)| = 0$ بنا به لم ۷ رد می‌شود.

لم ۱۱: اگر $|\text{Aut}(D)| \mid 5^\beta$ آن گاه $\beta \leq 1$.

اثبات: فرض کنید $|\text{Aut}(D)| \leq G$ از مرتبه ۲ باشد. پس $G \cong C_5 \times C_5$ یا $G \cong C_{25}$. حالت $G \cong C_{25}$ به سادگی رد می‌شود. پس $G \cong C_5 \times C_5$ و در نتیجه مرتبه هر عنصر ۵ است. پس هیچ‌کدام از عناصر G به جز عنصر همانی نقطه ثابت ندارند. بنا بر لم کشی-فروبینیوس،

$$r = \frac{1}{25} \sum \text{fix}(\alpha) = \frac{115}{25}.$$

که یک تناقض است. پس $|\text{Aut}(D)| \nmid 5^2$.

$$o(\alpha) = 19: \text{و}$$

در این جا $|\text{fix}(\alpha)| = 1$ و مشابه لم ۱۱، $|\text{Aut}(D)| \nmid 19^2$

قضیه زیر خلاصه بحث‌های فوق است:

قضیه: اگر $f \in \text{Aut}(D)$ ، آن گاه $o(f) = 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma 19^\sigma$ که در آن

$$\text{الف) } \beta, \gamma, \sigma \leq 1;$$

$$\text{ب) اگر } o(f) = 19, \text{ آن گاه } |\text{fix}(\alpha)| = 1;$$

$$\text{ج) اگر } o(f) = 5, \text{ آن گاه } |\text{fix}(\alpha)| = 0;$$

منابع

1. M. Aschbacher, *On Collination Groups of Symmetric Block Design*, J. Combinatorial Theory Ser. A **11** (1971) 272-281
2. Bowler, *On the fixed points of an Automorphism of a symmetric design*, J. Combin. Theory Ser. A **43** (1986), 350-343.
3. Brouwer, *Block designs*, pp. 693-745 in Handbook of Combinatorics (ed. R.L. Graham, M. Grottschel, L. Lovasz), Elsevier, Amsterdam (1995).
4. E. Lander, *Symmetric designs: an algebraic approach*, Cambridge University Press, Cambridge (1983).