روش حداقل مربعات برای محاسبه نقطه ثابت عملگر فروبنیوس ـ پرون

محمود محسنی مقدم ـ مرتضی رحمانی

مرکز پژوهشی ریاضی ماهان، دانشگاه کرمان ـ دانشکده ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه کرمان

خلاصه:

یکی از مسائل مهم در نظریه ارگودیک، محاسبه

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\chi_A\,(S^k(x))$$

است (در صورت وجود)، که در آن S یک تبدیل اندازه‌پذیر از [۱ , ۰] به خودش و A زیر مجموعه‌ای از [۱ , ۰] می‌باشد. در بسیاری از موارد محاسبه مستقیم این حد بدلیل خطای حاصل از گرد کردن اعداد در کامپیوتر با مشکل روبرو می‌شود [2,3,9]، ولی با الهام از قضیه ارگودیک بیرکوف و به کمک نقطه ثابت عملگر فروبنیوس ـ پرون محاسبه آن با خطای اندک امکانپذیر است. در اینجا بعد از ارائه مقدمات لازم، به شرح تعمیم روش حداقل مربعات می‌پردازیم، و سپس وجود جواد غیربدیهی و همگرائی روش را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در خاتمه نتایج عددی حاصل با نتایج عددی روش تصویرساز [2] مقایسه شده و نشان داده‌ایم که بنا به دلایل مختلف، از جمله بی‌کران بودن تابع نقطه ثابت، عدم امکان افزایش درجه تقریب و وجود ناپیوستگی نقطه ثابت، روش حاضر تقریبی مناسب‌تری ارائه می‌دهد.

۱ـ مقدمه

در اندازه‌گیریهای فیزیکی اغلب با توزیع احتمالی از یک کمیت فیزیکی روبرو هستیم. چنین وضعیتی را می‌توان در قالب ریاضی بصورت زیر بیان نمود:

«فرض کنید A یک زیر مجموعه از فضای وضعیت X و χ_A تابع مشخصه و S یک تبدیل اندازه‌پذیر از [۰,۱] به [۰,۱] باشد. در اینصورت میانگین زمانی که مسیر شروع شده از نقطه $x\in A$، در مجموعه A قرار می‌گیرد، برابر است با

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\chi_A\,(S^k(x)) \tag{1}$$

وجود و جنبه‌های دیگر این حد تحت عنوان نظریه ارگودیک مورد بررسی و تحلیل قرار می‌گیرد. از نقطه نظر عملی اندازه‌گیری عبارت (۱) بطور مستقیم بدلیل خطای حاصل از گرد کردن ماشین عموماً مشکل‌زا است. خوشبختانه با بهره‌گیری از قضایای بیرکوف و فون‌نیومن در نظریه ارگودیک تحت شرایط خاصی می‌توان حد فوق را در نظریه اندازه‌ها با روشی متفاوت محاسبه نمود. ذیلاً به اختصار تعاریف و قضایای لازم برای ادامه بحث بیان می‌شود:

تعریف ۱: در فضای اندازهٔ (X, Ω, μ) تابع $f: X \to R$ را تابع چگالی روی X نامیم اگر $f \in L^1(X)$، $f \geq 0$ و $||f||_1 = 1$

تعریف ۲: تبدیل اندازه‌پذیر $S: X \to X$ را حافظ اندازه (پایا) گوئیم هرگاه در فضای اندازه (X, Ω, μ) به ازای هر $A \in \Omega$ داشته باشیم، $\mu(S^{-1}(A)) = \mu(A)$.

تعریف ۳: تبدیل اندازه‌پذیر $S: X \to X$ را نامنفرد گوئیم هرگاه برای هر مجموعه اندازه‌پذیر $A \in \Omega$ با خاصیت $\mu(A) = 0$ داشته

باشیم، $\mu(S^{-1}(A)) = 0$.

تعریف ۴: فرض کنید $S : X \to X$ یک تبدیل منفرد اندازه‌پذیر باشد. عملگر $P_s : L^1(X) \to L^1(X)$ را که بصورت

$$\int_A P_s f d\mu = \int_{S^{-1}(A)} f d\mu \;\forall\, A \in \Omega$$

تعریف می‌شود، عملگر فروبنیوس - پرون می‌نامیم.

قضیه ارگودیک بیرکوف ۱: فرض کنید (X, Ω, μ) یک فضای اندازه σ-متناهی، $S : X \to X$ تبدیلی حافظ اندازه و $f \in L^1(X)$. آنگاه

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(S^k(x)) \quad (1)$$

تقریباً همه جا به تابعی مانند $f^* \in L^1(X)$ همگرا است و تقریباً همه جا

$$f^* oS(x) = f^*(x)$$

علاوه بر این هرگاه $\mu(X) < \infty$ آنگاه

$$\int_X f^* d\mu = \int_X f d\mu$$

برای اثبات قضیه فوق به [7] رجوع شود.

خواص عملگر فروبنیوس در قضایای زیر آمده است که اثبات آن ساده است.

قضیه ۲: عملگر فروبنیوس - پرون P_s دارای خواص زیر است:

الف) P_s خطی است.

ب) P_s نامنفی است، یعنی $P_s f \geq 0$ هرگاه $f \geq 0$.

ج) $\int_X P_s f d\mu = \int_X f d\mu$

د) $P_{S^n} = P_S^n$

ه) $||Pf||_1 = ||f||_1$.

قضیه ۳: فرض کنید (X, Ω, μ) یک فضای اندازه، $S : X \to X$ یک تبدیل نامنفرد معکوس‌پذیر و P_s عملگر فروبنیوس - پرون متناظر با S باشد. آنگاه برای هر $f \in L^1(X)$ داریم:

$$P_s f(x) = f(S^{-1}(x))J^{-1}(x)$$

که در آن

$$J^{-1}(x) = \left|\frac{ds^{-1}(x)}{dx}\right|.$$

قضیه ۴: فرض کنید $f \in L^1(X)$ و S تبدیل نامنفرد و $f \geq 0$. آنگاه

$$\nu(A) = \int_A P_s f d\mu = \int_{S^{-1}(A)} f d\mu \;\forall A \in \Omega \quad (2)$$

اندازه متناهی را تعریف می‌کند که نسبت به اندازه μ مطلقاً پیوسته است.

قضیه ۵: به ازای هر $f \in L^1(X)$ اندازه ν تحت S پایا است (S نسبت به ν حافظ اندازه است) اگر و فقط اگر تقریباً همه جا

$$P_s f = f. \quad (3)$$

با توجه به قضیه (۵) روشن است که برای یافتن حد (۱) کافیست به ازای تابع $\chi_A(x)$ در قضیه بیرکوف (۱) اندازه‌ای را بیابیم که S تحت آن حافظ اندازه (پایا) باشد. این مطلب خود منجر به مسئله یافتن تابعی مانند f معروف به نقطه ثابت عملگر P_s می‌شود. با یافتن نقطه ثابت P_s اندازه ν متناظر با نقطه ثابت f که از رابطه (۲) حاصل می‌شود، حافظ اندازه (پایا) بوده و به این ترتیب برای حد (۱) داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\chi_A(S^k(x)) = \nu(A) = \int_A f d\mu.$$

پیدا نمودن نقطه ثابت عملگر فروبنیوس - پرون در سالهای اخیر توجه زیادی از ریاضی‌دانان را بخود جلب نموده است [1, 6, 7, 8, 11, 14]. Li در سال ۱۹۷۶ با استفاده از فضای تولید شده از ترکیب توابع ثابت مسئله مورد بحث را به پیدا نمودن نقطه ثابت یک فضا با بعد متناهی تبدیل نمود. بدین ترتیب اولین گام در جهت پیدا نمودن تقریبی مناسب برای نقطه ثابت این قبیل عملگرها برداشته شد [9, 10]. Gora و Boyarsky با محاسبهٔ تقریبی برای تبدیلات چگالی حافظ اندازه (پایا) با افرازی نامتناهی روی بازهٔ [0 , 1] به حل این مسئله پرداختند [5]. همچنین پیدا نمودن تقریبی مناسب برای نقطه ثابت تبدیلات چگالی حافظ اندازه (پایا) توسط Li و Ding با استعانت از تقریبات متناهی مارکوف در [3] مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. تقریب نقطه ثابت عملگر فروبنیوس - پرون با استفاده از B-اسپلاینها نیز توسط رحمانی و محسنی در [21] بررسی شده است. در آنجا برای پیدا

نمودن تقریبی مناسب برای نقطه ثابت از چند جمله‌ایهای قطعه‌وار هموار از درجه یک و دو و درجات بالاتر استفاده شده است. در اینجا روش حداقل مربعات برای محاسبه تقریبی نقطه ثابت عملگر فروبنیوس - پرون ارائه می‌شود که در مقام مقایسه با سایر روشها بدلیل عدم استفاده از انتگرالگیری عددی و همچنین سادگی روش از برتری ویژه‌ای برخوردار است. علاوه بر این نسبت به روشهای مشابه به حافظه کامپیوتری کمتری نیاز دارد و از سرعت همگرائی بیشتری برخوردار است.

۲ـ تقریب نقطه ثابت P_s بکمک حداقل مربعات

فرض کنید نقطه ثابت P_s یک چند جمله‌ای قطعه به قطعه روی افرازی متناهی مانند $\{B_j\}_{j=1}^{K}$ از فاصله $[0,1]$ است:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{K} \Big(\sum_{i=0}^{n} \alpha_{ji}\, x^i\Big) X_{B_j}$$

ابتدا هر افراز B_j را به N قسمت (زیرافراز) تقسیم می‌کنیم و هر یک را با A_{lj} نمایش می‌دهیم. با توجه به عملگر P_s داریم

$$\int_{A_{lm}} P_s f\, dx = \int_{A_{lm}} f\, dx \quad \forall l, m$$

و یا:

$$\int_{A_{lm}} P_s \sum_{j=1}^{K} \Big(\sum_{i=0}^{n} \alpha_{ji} x^i\Big) \chi_{B_j} - \int_{A_{lm}} \sum_{j=1}^{K} \Big(\sum_{i=0}^{n} \alpha_{ji} x^i\Big) \chi_{B_j} = 0 \quad \forall l,m.$$

با توجه به خطی بودن P_s داریم:

$$\sum_{j=1}^{K} \sum_{i=0}^{n} \alpha_{ji} \Big(\int_{A_{lm}} P_s x^i \chi_{B_j}\, dx - \int_{A_{lm}} x^i \chi_{B_j}\, dx\Big) = 0 \quad \forall l,m.$$

و یا:

$$\sum_{j=1}^{K} \sum_{i=0}^{n} \alpha_{ji} \Big(\int_{S^{-1}A_{lm}} x^i \chi_{B_j}\, dx - \int_{A_{lm}} x^i \chi_{B_j}\, dx\Big) = 0 \quad \forall l,m.$$

و نهایتاً

$$\sum_{j=1}^{K} \sum_{i=0}^{n} \alpha_{ji} \frac{1}{i+1} \Big(x^{i+1}\big|_{S^{-1}(A_{lm})\cap B_j} - x^{i+1}\big|_{A_{lm}\cap B_j}\Big) = 0 \qquad (4)$$

$$\forall l,m \quad 1 \le l \le N,\ 1 \le j \le K$$

حال با استفاده از نماد

$$\alpha_{ji}^{lm} = \frac{1}{i+1} \Big(x^{i+1}\big|_{S^{-1}(A_{lm})\cap B_j} - x^{i+1}\big|_{A_{lm}\cap B_j}\Big)$$

که در آن اندیسهای بالائی نماینده سطر و اندیسهای پائینی نماینده ستون هستند، رابطه (۴) را می‌توان با نماد ماتریسی زیر نمایش داد:

$$A\alpha = 0 \qquad (5)$$

که در آن

$$\alpha = (\alpha_{10}, \alpha_{11}, \alpha_{1n}, \alpha_{k0}, \alpha_{k1}, \dots, \alpha_{kn})^T$$

از آنجائی که f تابع چگالی است، برای اجتناب از جواب بدیهی دستگاه همگن (۵)، شرط زیر را به دستگاه اضافه می‌کنیم:

$$\int_0^1 \sum_{j=1}^{K} \Big(\sum_{i=0}^{n} \alpha_{ji} x^i\Big) \chi_{B_j} = 1.$$

به این ترتیب با افزودن شرط فوق، دستگاه ناهمگن زیر بدست می‌آید.

$$A'\alpha = Y \qquad (6)$$

که در آن $A' = \begin{bmatrix} A \\ c \end{bmatrix}$ و $Y = (0,0,\dots,0,1)^T$ و $C_{ji} = \frac{1}{i+1} x^{i+1}\big|_{B_j}$.

حل دستگاه $(K \times N + 1)\times(n \times k + n)$ بعدی (۶) معادل یافتن مینیمم تابع محدب زیر است.

$$S(\alpha)=\sum_{m=1}^{K} \sum_{l=1}^{N} \Big(\sum_{j=1}^{K}\sum_{i=0}^{n} \alpha_{ji}\alpha_{ji}^{lm} - y_{lm}\Big)^2 + \Big(\sum_{j=1}^{K}\sum_{i=0}^{n} \alpha_{ji}C_{ji} - y_{N.k+1}\Big)^2$$

یافتن مینیمم تابع S، با محاسبه مشتقات جزئی نسبت به متغیرهای α_{ji} منجر به حل دستگاه مربعی زیر می‌شود.

$$A'^T A'\alpha = A'^T Y \qquad (7)$$

قضیه ۶: دستگاه معادلات (۶) دارای جواب غیربدیهی است.

اثبات: ماتریس هسیان S، یعنی $A'^T A'$، بدلیل تقارن، یک ماتریس نیمه معین مثبت می‌باشد. بنابراین تابع S یک تابع محدب است. علاوه بر این در نقطه بدیهی صفر داریم:

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_{\nu\mu}}\Big|_0 = 2 \sum_{m=1}^{K} \sum_{l=1}^{N} \alpha_{\nu\mu}^{lm} \Big(\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=0}^{n} \alpha_{ji}\alpha_{ji}^{lm} - y_{lm}\Big)\Big|_0$$

$$+ 2C_{\nu\mu}\Big(\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=0}^{n} \alpha_{ji}C_{ji} - y_{N,k+1}\Big)\Big|_0$$

$$= -2C_{\nu\mu} = -\frac{2}{\mu+1} x^{\mu+1}\big|_{B_\nu} < 0$$

بنابراین نقطه صفر حداقل تابع S نیست، و بنابراین (به [13] مراجعه شود) دستگاه (۶) دارای جواب غیربدیهی است.

نکته: وجود جواب غیربدیهی برای دستگاه (۶) را می‌توان بصورت زیر نیز اثبات نمود:

دستگاه معادلات $A^T\alpha = ٠$ در α برابر است با:

$$\sum_{m=١}^{K}\sum_{l=١}^{N} a_{ji}^{lm} = \sum_{m=١}^{K}\sum_{l=١}^{N} \frac{١}{i+١}\left(x^{i+١}\big|_{S^{-1}(A_{lm})\cap B_j} - x^{i+١}\big|_{A_{lm}\cap B_j}\right)$$

$$= \sum_{m=١}^{K}\sum_{l=١}^{N}\left(\int_{A_{lm}} P_s(x^i\chi_{B_j})dx - \int_{A_{lm}} x^i\chi_{B_j}dx\right)$$

$$= \int_٠^١ P_s(x^i\chi_{B_j})dx - \int_٠^١ x^i\chi_{B_j}dx = ٠$$

نتیجه اخیر با توجه به خاصیت (ج) از قضیه (۲) حاصل می‌شود.

با توجه به رابطه فوق رتبه ماتریس A^T از حداقل تعداد سطر و ستونهای آن کمتر است و بنابراین $A\alpha=٠$ باید دارای جواب غیربدیهی باشد. از آنجائی که حداقل یکی از متغیرهای جواب معادله (۵) آزاد است، می‌توان مجهولات را طوری انتخاب نمود که دستگاه معادلات (۶) دارای جواب باشد.

۳ـ کران برای تابع $g(x) = P_s f(x) - f(x)$

فضای تولید شده توسط تابع ثابت ۱، یعنی $\{\alpha ١ : \alpha \in R\}$ را در نظر می‌گیریم. مقدار α برای جواب دستگاه (۶) در حالت خاص تنها افراز $B_١ = [٠,١]$ برابر ۱ است. زیرا برای سطر اول از دستگاه داریم:

$$\alpha \int_٠^١ pf dx - \alpha \int_٠^١ f dx = \alpha \times ٠ = ٠$$

و برای سطر دوم داریم:

$$\alpha \int_٠^١ f(x)dx = \alpha = ١.$$

حال اگر برای ضابطه $S^{-١}(x)$ داشته باشیم

$$S^{-١}(x) = \sum_{\kappa=١}^{m} S_\kappa^{-١}(x)\,\chi_{s(B_\kappa)}(x) \qquad (۸)$$

با توجه به رابطه

$$P_s f(x) = \left|\frac{dS^{-١}(x)}{dx}\right| f(S^{-١}(x))$$

که شکل کلی آن در ارتباط با رابطه (۸) عبارتست از

$$P_s f(x) = \sum_{\kappa=١}^{m}\left|\frac{dS_\kappa^{-١}(x)}{dx}\right| f(S_\kappa^{-١}(x))\chi_{s(B_\kappa)}(x)$$

برای تابع $f(x) = ١$ خواهیم داشت:

$$P_s ١ = \sum_{\kappa=١}^{m}\left|\frac{dS_\kappa^{-١}(x)}{dx}\right|\chi_{s(B_\kappa)}(x). \qquad (۹)$$

حال اگر $\lambda = \inf\left|\frac{ds(x)}{dx}\right| > ٠$. آنگاه از رابطه (۹) داریم:

$$||g||_\infty = ||P_s ١ - ١||_\infty = \left|\left|\sum_{\kappa=١}^{m}\left|\frac{dS_\kappa^{-١}(x)}{dx}\right|\chi_{s(B_\kappa)}(x) - ١\right|\right|_\infty$$

$$\leq m\lambda^{-١} + ١ \quad \text{تقریباً همه جا}$$

نکته: در حالت افراز بیشتر و تقریب از درجه بالاتر، با توجه به بحث نقطه حداقل تابع S، کران پائین بهتری برای $g(x)$ نتیجه می‌شود: یعنی هرگاه $f(x)$ تقریب مرتبه بالاتر باشد، داریم

$$||g||_\infty = ||P_s f - f||_\infty \leq m\lambda^{-١} + ١ < \infty$$

مثال ۱: در حالت $S(x) = x$، $\lambda = ١$ و برای هر $f(x)$ داریم

$$||g||_\infty \leq |١ - ١| = ٠$$

بنابراین هر تابع ∞ نقطه ثابت عملگر P_s است.

مثال ۲: برای

$$S(x) = \begin{cases} \frac{x}{a} & ٠ \leq x < a \\ \frac{١-x}{١-a} & a \leq x < ١ \end{cases}$$

در حالت $f(x) = ١$ داریم:

$$||g||_\infty = |a + (١-a) - ١| = ٠$$

بنابراین تابع ثابت ۱ نقطه ثابت P_s می‌باشد.

مثال ۳: برای $S_٥$ در بخش ۵، با توجه به آنکه $\inf\left|\frac{ds}{dx}\right| = ٠$، با استفاده از روش فوق نمی‌توان کرانی بدست آورد.

۴ـ همگرائی روش

هر تابع اندازه‌پذیر کراندار مانند g را می‌توان با دنباله متناهی از توابع ساده تقریب زد. به عبارت دیگر به ازای هر ε دلخواه افرازی مانند $\{A_i\}$ می‌توان یافت بطوریکه

$$g(x) = \sum_{i=١}^{m} c_i\chi_A + h(x)$$

که در آن

$$\tilde{f} = \sum_{i=١}^{m} c_i\chi_{A_i} \quad |h(x)| < \varepsilon \ \forall x \in A_i$$

حال فرض کنید که برای هر i داشته باشیم $(g(x)\ ,\ \chi_{A_i}) = 0$ آنگاه

$$(g(x)\ ,\ g(x)) = (g(x)\ ,\ \tilde{f}(x) + h(x))$$
$$= (g(x), \tilde{f}(x)) + (g(x), h(x)) = (g(x), h(x)).$$

به این ترتیب

$$\|g\|_2^2 = |(g(x)\ ,\ g(x))| = |(g(x)\ ,\ h(x))|$$

و بنا به نامساوی هلدر

$$\leq \|g\|_\infty \cdot \|h\|_1 < \|g\|_\infty \cdot \varepsilon\ .$$

زیرا در فاصله $[0,1]$، برای تابع h داریم $\|h\|_1 < \varepsilon$. حال اگر $\varepsilon \to 0$، آنگاه $\|g\|_2^2 = 0$ و از اینجا $g(x) = 0$ تقریباً همه جا، و یا تقریباً همه جا $P_s f(x) = f(x)$، به این ترتیب f نقطه ثابت عملگر P_s است.

با توجه به قضیه لوزین و قضیه وایرشتراس بدون کاستن از کلیت مسئله می‌توان فرض کرد که g یک چند جمله‌ای است.

قضیه ۷: اگر $g(x)$ چند جمله‌ای درجه n متعلق به فضای تولید شده توسط $\{1, x, \dots, x^n\}$ و $\{A_\kappa\}_1^{n+1}$ افرازی از فاصله $[0,1]$ باشد و برای $\kappa = 1, 2, \dots, n+1$ داشته باشیم $(g(x)\ ,\ \chi_{A_\kappa}) = 0$، آنگاه $g(x) = 0$ و تابع f حاصل از روش فوق نقطه ثابت P_s است.

اثبات. فرض کنید که در فاصله $A_\kappa \setminus \partial A_\kappa$ (∂A_κ مرز A_κ است) داشته باشیم $g(x) > 0$ (یا $g(x) < 0$) در اینصورت واضح است که $(g(x), \chi_{A_\kappa}) \neq 0$. بنابراین با توجه به فرض قضیه برای برقراری شرط $(g(x), \chi_{A_\kappa}) = 0$ در فاصله $A_\kappa \setminus \partial A_\kappa$ تابع g باید تغییر علامت دهد؛ یعنی

$$\exists_{y_\kappa} \in A_\kappa \setminus \partial A_\kappa \ni g(y_\kappa) = 0.$$

به این ترتیب $g(x)$ در فاصله $[0,1]$ حداقل $n+1$ ریشه دارد، و این ممکن نیست مگر آنکه $g(x) \equiv 0$. یعنی، $P_s f = f$.

قضیه ۸: هرگاه $g(x)$ چند جمله‌ای قطعه به قطعه حداکثر از درجه n باشد، و در هر قطعه داشته باشیم:

$$(g(x) \cdot \chi_{B_i}, \chi_{A_{ji}}) = 0 \qquad i = 1, 2, \dots, \kappa, \qquad j = 1, 2, \dots, n+1$$

و $\{A_{ji}\}$ افرازی از B_i باشد، آنگاه تابع f حاصل از روش فوق نقطه ثابت P_s است.

اثبات. بنا به قضیه (۷) در هر افراز B_i داریم $g(x)\chi_{B_i} \equiv 0$، و از اینجا $g(x) \equiv 0$ و در نتیجه $P_s f = f$.

۵ـ نتایج عددی

در این بخش نتایج عددی روش را که روی تبدیلات زیر انجام گرفته است، با نتایج عددی مقاله [2] مقایسه می‌کنیم.

$$S_1(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 2(1-x) & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \qquad f^*(x) = 1$$

$$S_2(x) = \left(\frac{1}{8} - 2\left|x - \frac{1}{2}\right|^3\right) + \frac{1}{2} \qquad f^*(x) = 12\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$

$$S_3(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{1-x^2} & 0 \leq x \leq \sqrt{2}-1 \\ \dfrac{1-x^2}{2x} & \sqrt{2}-1 \leq x \leq 1 \end{cases} \qquad f^*(x) = \frac{4}{\pi(1+x^2)}$$

$$S_4(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{1-x} & 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ \dfrac{1-x}{2x} & \frac{1}{3} \leq x \leq 1 \end{cases} \qquad f^*(x) = \frac{2}{(1+x)^2}$$

$$S_5(x) = 4x(1-x) \qquad f^*(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}$$

$$S_6(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{(\frac{1}{2})^{\frac{1}{p}}} & 0 \leq x \leq (\frac{1}{2})^{\frac{1}{p}} \\ \dfrac{(1-x^p)^{\frac{1}{p}}}{(\frac{1}{2})^{\frac{1}{p}}} & (\frac{1}{2})^{\frac{1}{p}} \leq x \leq 1 \end{cases} \qquad f^*(x) = px^{p-1}$$

$$S_7(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 + \frac{3}{2}(\frac{1}{2} - x) & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \qquad f^* = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$f^* = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

در مورد S_2 همانطوری که در مقاله [2] اشاره شده است، خطای زیاد در انتگرال‌گیری عددی مانع از رسیدن به نتایج دقیق f^* می‌گردد، در حالی که در روش حاضر f^* بطور دقیق بدست می‌آید.

در مورد S_5 بدلیل بی‌کران بودن f^* سرعت همگرائی در هر دو روش کند است، با این وجود میزان خطا در روش حاضر کمتر از روش [2] است و با افزایش درجه تقریب می‌توان میزان خطا را کاهش داد.

در حالی که در روش [2] افزایش درجه باعث افزایش خطا می‌شود. در مورد مثال $S_۷$، فواصل طوری انتخاب شده‌اند که انتهای فواصل نقاط ابتدائی و انتهائی [۰،۱] و یا نقاط ناپیوستگی $S'_۷(x)$ باشند. با این انتخاب $f^*_۷$ به کمک تابع ثابت قطعه به قطعه بطور دقیق بدست می‌آید. در مورد $S_۶$، با تقریب درجه P، با اختیار یک فاصله می‌توان به f^* رسید. در مورد $S_۱$ روش [2] به خطای کمتر از $۱۰^{-۸}$ می‌رسد، در روش حاصل با توجه به $S_۷$ که $S_۱$ حالت خاصی از آن است به تقریب با خطای تقریباً صفر می‌رسیم. در جدول (۱) ستون اول مربوط به خطای روش [2] و ستون دوم مربوط به خطای روش حاضر است.

$S_۲$

nod	deg.۰	deg.۱	deg.۲	
۴	۴/۵۱e−۱ ۴/۲۵e−۱	۵/۵۵e−۲ ۵/۴۴e−۲	۱/۴۹e−۲ ۱/۹۵e−۱۲	
۸	۲/۲۹e−۱ ۲/۲۱e−۱	۱/۴۸e−۲ ۱/۵۱e−۲	۲/۷۰e−۳ ۷/۸۵e−۱۱	
۱۶	۱/۰۲e−۱ ۱/۰۲e−۱	۳/۵۷e−۳ ۳/۳۹e−۲		

$S_۳$

nod	deg.۰	deg.۱	deg.۲	deg.۳
۴	۸/۳۰e−۲ ۵/۳۱e−۲	۱/۲۳e−۲ ۲/۴۳e−۳	۱/۰۷e−۲ ۲/۴۴e−۴	** ۹/۵e−۶
۸	۴/۰۶e−۲ ۲/۳۸e−۲	۳/۱۴e−۳ ۶/۴۳e−۴	۲/۵e−۳ ۲/۱۴e−۵	
۱۶	۲/۰۲e−۲ ۱/۱۶e−۲	۷/۸۶e−۴ ۱/۶۶e−۴		

$S_۴$

nod	deg.۰	deg.۱	deg.۲	deg.۳
۴	۱/۱۹e−۱ ۱/۰۲e−۱	۳/۳۹e−۲ ۸/۴۱e−۳	۳/۷۰e−۲ ۵/۵۷e−۴	** ۴/۲e−۵
۸	۵/۸۶e−۲ ۵/۰۶e−۲	۱/۱۸e−۲ ۱/۹۸e−۳	۱/۰۳e−۲ ۸/۴۷e−۵	
۱۶	۲/۷۹e−۲ ۲/۶۴e−۲	۳/۲۲e−۳ ۵/۶۷e−۴		

$S_۵$

nod	deg.۰	deg.۱	deg.۲	deg.۴
۴	۳/۸۹e−۱ ۳/۶۳e−۱	۳/۰۷e−۱ ۲/۴۵e−۱	۲/۰۱e−۱ ۱/۶۸e−۱	** ۹/۶e−۲
۸	۳/۱۰e−۱ ۲/۶۰e−۱	۲/۲۷e−۱ ۱/۷۷e−۱	۱/۷۳e−۲ ۱/۰۴e−۱	
۱۶	۲/۴۷e−۱ ۱/۸۶e−۱	۱/۶۸e−۱ ۱/۱۰e−۱		

$S_۶$

nod	deg.۰	deg.۱	deg.۲	deg.۴/۳
۴	۳/۱۱۶۰۳۰۲e−۰۱	۴/۷۷۲۴۲۸۷e−۰۲	۲/۷۴۷۸۱۰۷e−۰۳	۲/۷۰۱۰۹۰۳e−۰۹
۸	۱/۶۱۱۶۵۷۰e−۰۱	۱/۲۰۷۱۲۲۰e−۰۲	۳/۳۹۸۰۹۴۴e−۰۴	۱/۲۹۰۸۳۳۰e−۰۵
۱۶	۸/۱۴۴۶۸۲۴e−۰۲	۳/۰۱۹۸۰۴۷e−۰۳		

S_V

nod	deg.۰	deg.۱	deg.۲	
۴	۱/۳۸۷۹۶۳۸e−۱۵	۳/۴۴۷۶۵۷۰e−۱۴	۱/۱۷۸۹۳۳۲e−۱۲	

(جدول ۱)

REFERENCES

[1]. **C. Chiu, Q. Du and T. Y. Li**, Error Estimates of the Finite Approximation of the Frobenius-Perron Operator, J. Nonlinear Analysis 19, No, 4, PP. 291-308, (1992).

[2]. **J. Ding, Q. Du and T. Y. Li**, High Order Approximation of the Frobenius-Perron Operator, Appl. Math. Compt. 53, pp. 151-171, (1993).

[3]. **J. Ding and T. Y. Li**, Markov Finite Approximation of Frobenius-Perron Operator Equations, J. Nonlidear Anal., Vol. 17, No. 8, pp. 759-772. (1991).

[4]. **J. Ding and T. Y. Li**, Projection Solution of the Frobenius-Operator Equations, Inter. J. Math. Sci. 16, No. 3, pp. 465-484, (1993).

[5]. **P. Gora and A. Boyarsky**, Approximating the Invariant Densities of Transformations with Infinitely Many Pieces on the Interval, Proc. Amer. Math. Soc. 105,922-928. (1989).

[6]. **T. Kohda and K. Murao**, Piecewise Polynomial Galerkin Approximation to Invariant Densities of One-dimensional Difference Equations, Elec. and Comm. Japan, Part A 65, No. 6, pp. 1-11, (1982).

[7]. **A. Lasota and M. C. Markov** Chaos, Fractals and Noise Stochastic Aspects of Dynamics, Springer-Verlag, 1994.

[8]. **A. Lasota and J. A. Yorke**, On the Existence of Invarant Measures for Piecewise Monoton Transformations, Trans. Amer. Math. Soc., 186, pp. 481-488. (1973).

[9]. **T. Y. Li, J. A. Yorke**, Finite Approximation for the Frobenius-Perron Operators, a Solution to Ulam's Conjecture, J. Approx. Theory 17, pp. 177-186, (1976).

[10]. **T. Y. Li, J. A. Yorke**, Ergodic Transformation from an Interval to Itself, Trans. Amer. Math. Soc., 235, pp. 183-192, (1978).

[11]. **M. Mohseni Moghadam and M. Panahi**, Some Aspects of the Frobeniusperron Operator, Proc. of the 26 th Annual Iranian Math. Conf., pp. 263-266, (1995).

[12]. **M. Rahmani and M. Mohseni Moghadam**, Approximation of the Fixedpoint of the Frobenius-Perron Operator by B-Splines, Proc. of the 26th Annual Iranian Math. Conf., pp. 326-332, (1995).

[13]. **J. Stoer and R. Bulirsch**, Introduction to Numerical Analysis, SpringerVerlag, (1980).

[14]. **S. M. Ulam**, A Collection of Mathematical Problems, Interscience Tracts in Pure and Applied Math., Vol. 8, Interscience, New York, (1960).