مرکز توپولوژیکی ضعیف از دوگان دوم جبرهای باناخ

قادر قاسمی، *کاظم حق‌نژاد آذر: دانشگاه محقق اردبیلی

چکیده

در این مقاله برای اولین بار مفهوم جدیدی به‌عنوان مرکز توپولوژیکی ضعیف چپ و راست برای دوگان دوم جبرهای باناخ A، A^{**} را تعریف کرده و رابطهٔ آن را با آرنز منظم پذیری A^{**} بررسی می‌کنیم.

مقدمات و تعاریف اولیه

آرنز (۱۹۵۱) [۱]، نشان داد که برای فضاهای باناخ A, B, C و عمل‌گر دوخطی کراندار $m: A\times B\rightarrow C$ دو توسیع مانند $m_2^{***}: A^{**}\times B^{**}\rightarrow C^{**}$ و $m_1^{***}: A^{**}\times B^{**}\rightarrow C^{**}$ وجود دارند که هر یک از آن‌ها کراندار دوخطی هستند. وی نشان داد که m_1^{***} و m_2^{***} همیشه با هم برابر نیستند و در صورتی که این دو برابر باشند، گوییم m آرنز منظم‌پذیر است. بنا بر این او تعریف ضرب‌های اول و دوم آرنز را برای دوگان دوم جبرهای باناخ مطرح کرد و برای فضای توپولوژیک هاوسدورف و فشرده X، نشان داد که این دو ضرب برای دوگان دوم $C(X)$ (مجموعه توابع پیوسته روی X) با هم یکی هستند یا به عبارت بهتر $C(X)$ آرنز منظم‌پذیر است. او همچنین برای جبر باناخ ℓ^1 با ضرب نقطه‌ای نشان داد که ℓ^1 نیز آرنز منظم‌پذیر است در حالی که برای ℓ^1 با عمل ضرب پیچشی، ضرب‌های اول و دوم در ℓ^{1**} یکی نیستند و در نتیجه ℓ^1 آرنز منظم‌پذیر نخواهد بود. بحث ضرب‌های آرنز روی دوگان دوم جبرهای باناخ A منجر به تعریف مراکز توپولوژیکی A^{**} نسبت به ضرب‌های اول و دوم شدند که آن‌ها را با Z_1 و Z_2 نشان می‌دهند. برای اطلاعات بیش‌تر به [۱]، [۳]، [۵]، [۶]، [۱۰] مراجعه شود.

در بحث‌های ذیل به تعدادی تعاریف پایه اشاره می‌کنیم که در سراسر این مقاله از آن‌ها استفاده خواهیم کرد:

برای جبر باناخ A فرض کنیم $a\in A$ و $a'\in A^*$ ، در این صورت $a'a$ و aa' عضوهایی از A^* هستند به طوری که برای هر $b\in A$ داریم:

$$\langle a'a,b\rangle=\langle a',ab\rangle=a'(ab) \text{ و } \langle aa',b\rangle=\langle a',ba\rangle=a'(ba).$$

واژه‌های کلیدی: جبرهای باناخ، آرنز منظم، مرکز توپولوژیکی، مرکز توپولوژیکی ضعیف
دریافت ۸۹/۷/۱۷ پذیرش۹۰/٦/١٦
*نویسنده مسئول

با توجه به این‌که می‌توانیم جبر باناخ A را تحت نگاشت $a \to \hat{a}$ از A به A^{**} بنشانیم، در این جا ما $\hat{A} = \{\hat{a} : a \in A\}$ را با A یکی می‌گیریم و به‌طور خلاصه A را زیر فضایی از A^{**} در نظر می‌گیریم. $A^{*}A$ و AA^{*} را به صورت‌های ذیل معرفی می کنیم:

$$AA^{*} = \{aa' : a \in A, a' \in A^{*}\}, \quad A^{*}A = \{a'a : a' \in A^{*}, a \in A\}.$$

فرض کنید برای هر $a,b \in A$ داشته باشیم $m(a,b) = ab$ که در این جا m یک ضرب در جبر باناخ A است. برای هر $f \in A^{*}$ و $F,G \in A^{**}$ ضرب اول آرنز را برای A^{**} که یک توسیع ضرب در A است بدین صورت تعریف می‌کنیم:

$$\langle fa,b \rangle = \langle f ,ab \rangle,\ \langle Ff ,a \rangle = \langle F,fa \rangle,\ \langle F\square G,f \rangle = \langle F,Gf \rangle.$$

واضح است که $F\square G \in A^{**}$، $Ff \in A^{*}$ و $fa \in A^{*}$. برای ضرب اول آرنز، از علامت $(A^{**},\square)$ یا به طور خلاصه از A^{**} استفاده می‌کنیم (به‌طورکلی منظور ما از جبر باناخ A^{**}، نسبت به ضرب اول آرنز خواهد بود). حال برای $a,b \in A$ و $f \in A^{*}$ و $F,G \in A^{**}$ ضرب دوم را بدین صورت تعریف می‌کنیم:

$$\langle a\lozenge f ,b \rangle = \langle f ,ba \rangle,\ \langle f \lozenge F,a \rangle = \langle F,a\lozenge f \rangle,\ \langle F\lozenge G,f \rangle = \langle G,f \lozenge G \rangle.$$

واضح است که $F\lozenge G \in A^{**}$، $f \lozenge F \in A^{*}$ و $a\lozenge f$. در صورتی که برای هر $F,G \in A^{**}$، داشته باشیم $F\square G = F\lozenge G$، آنگاه A آرنز منظم‌پذیر است. به‌عنوان مثال در صورتی که G یک گروه توپولوژیک متناهی باشد $L^{1}(G)$ و $M(G)$ آرنز منظم‌پذیر هستند و در صورتی که G گروه توپولوژیک نامتناهی باشد، آن‌ها آرنز منظم‌پذیر نخواهند بود. در صورتی که X فضایی فشرده موضعی هاوسدرف باشد $C_{0}(X)$ (مجموعه‌ای توابع روی X که در بی‌نهایت صفر هستند) آرنز منظم‌پذیر خواهد بود برای اطلاعات بیش‌تر به [۱]، [۳]، [۹] مراجعه شود. برای جبر باناخ A، مرکز توپولوژیک A^{**} را نسبت به ضرب‌های اول و دوم آرنز به‌ترتیب بدین صورت تعریف می‌کنیم.

$$Z_{1} = \{F \in A^{**} : \text{نگاشت } G \to F\square G \text{ ، ضعیف ستاره- ضعیف ستاره پیوسته است}\},$$

$$Z_{2} = \{F \in A^{**} : \text{نگاشت } G \to G\lozenge F \text{ ، ضعیف ستاره- ضعیف ستاره پیوسته است}\}.$$

واضح است که $A \subseteq Z_{1} \cap Z_{2}$ و Z_{1} و Z_{2} زیرجبرهای بسته‌ای از A^{**} هستند. در صورتی که ضرب در A جابه‌جایی باشد آنگاه $Z_{1} = Z_{2}$ و همچنین درحالتی که $Z_{1} = A^{**}$، در این صورت A یک جبر آرنز منظم است. در صورتی که $Z_{1} = A$ باشد، آنگاه A یک جبر قویاً آرنز نامنظم نامیده می‌شود و همچنین به راحتی می‌توان نشان داد:

$$Z_{1} = \{F \in A^{**} : F\square G = F\lozenge G \text{ ، برای هر } G \in A^{**}\},$$

$$Z_{2} = \{F \in A^{**} : G\square F = G\lozenge F \text{ ، برای هر } G \in A^{**}\}.$$

گوییم $f \in A^*$ تقریب متناوب ضعیف روی A است، هرگاه نگاشت $a \to fa$ از A به A^* ضعیف فشرده باشد. در این صورت می‌نویسیم $f \in wap(A)$. پیم در [۸]، نشان داد که $f \in wap(A)$ اگر و تنها اگر برای هر دو دنباله $(a_n)_n$ و $(b_m)_m$ از $\{a \in A : \|a\| \le 1\}$ داشته باشیم :

$$\lim_n \lim_m \langle f, a_n b_m \rangle = \lim_m \lim_n \langle f, a_n b_m \rangle.$$

در این صورت با توجه به [۸]، $wap(A) = A^*$ اگر و تنها اگر A آرنز منظم‌پذیر باشد.

مرکز توپولوژیکی ضعیف جبرهای باناخ

در این بخش برای اولین بار، برای یک جبر باناخ A، مفهومی به نام مرکز توپولوژیکی ضعیف معرفی می‌کنیم و روابط بین مرکز توپولوژیکی از جبرهای باناخ و مرکز توپولوژیکی ضعیف آن‌ها را بررسی می‌کنیم. این مفهوم کاملاً جدید است و برای بحث‌هایی که قبلاً در خصوص مراکز توپولوژیکی جبرهای باناخ بررسی شده‌اند، می‌توان آن‌ها را برای این مفهوم به‌کار برد و نتایج جدیدتری را در جبرهای خاص به‌دست آورد. در این قسمت بیش‌تر منظور ما از ضرب آرنز، نسبت به ضرب اول است و برای $a'', b'' \in A^{**}$ منظور ما از $a''b''$ همان ضرب اول آرنز $a''\square b''$ است.

تعریف ۲-۱: فرض کنید A یک جبر باناخ باشد؛ در این صورت مرکز توپولوژیکی ضعیف چپ و راست دوگان دوم A، A^{**} را بدین صورت تعریف می‌کنیم:

$$Z_1^{w\ell}(A^{**}) = \{a'' \in A^{**} : \text{نگاشت } b'' \to a''b'' \text{، ضعیف ستاره- ضعیف پیوسته باشد}\},$$

$$Z_1^{wr}(A^{**}) = \{a'' \in A^{**} : \text{نگاشت } b'' \to b''a'' \text{، ضعیف ستاره- ضعیف پیوسته باشد}\},$$

$$Z_2^{w\ell}(A^{**}) = \{a'' \in A^{**} : \text{نگاشت } b'' \to a''\Diamond b'' \text{، ضعیف ستاره- ضعیف پیوسته باشد}\},$$

$$Z_2^{wr}(A^{**}) = \{a'' \in A^{**} : \text{نگاشت } b'' \to b''\Diamond a'' \text{، ضعیف ستاره- ضعیف پیوسته باشد}\}.$$

در این جا $Z_i^{w\ell}(A^{**})$ برای $i=1,2$ به‌ترتیب مراکز توپولوژیکی ضعیف چپ دوگان دوم A، A^{**} نسبت به ضرب‌های آرنز اول و دوم هستند. در این صورت واضح است که $Z_i^{w\ell}(A^{**})$ و $Z_i^{wr}(A^{**})$ زیرفضاهایی از A^{**} به‌ترتیب نسبت به ضرب اول و دوم آرنز هستند. همچنین داریم $Z_1^{w\ell}(A^{**}) \subseteq Z_1(A^{**})$ و $Z_2^{wr}(A^{**}) \subseteq Z_2(A^{**})$ و اگر $Z_1(A^{**}) = Z_2(A^{**})$ آن‌گاه داریم: $Z_1^{wr}(A^{**}) = Z_2^{wr}(A^{**})$ و $Z_1^{w\ell}(A^{**}) = Z_2^{w\ell}(A^{**})$ و در صورتی که $Z_1(A^{**}) = Z_1^{w\ell}(A^{**}) = Z_2^{wr}(A^{**})$ یا $Z_1^{w\ell}(A^{**}) = Z_2^{wr}(A^{**}) = Z_2(A^{**})$ نتیجه می‌گیریم که: $Z_1(A^{**}) = Z_2(A^{**})$. مشاهده می‌شود در صورتی که $Z_1^{w\ell}(A^{**}) = A^{**}$ یا $Z_1^{wr}(A^{**}) = A^{**}$ در این صورت A یک جبر باناخ آرنز منظم‌پذیر است.

حال اگر فرض کنیم $Z_1^{w\ell}(A^{**}) \subseteq Z_1(A^{**})$ در نتیجه برای هر زیر فضای B از A^{**} داریم:

$$BZ_1^{w\ell}(A^{**}) \subseteq BZ_1(A^{**}).$$

اگر جبر باناخ A آرنز منظم‌پذیر یا قویاً آرنز نامنظم چپ باشد در حالت کلی نمی‌توانیم نتیجه بگیریم که $Z_1^{w\ell}\left(A^{**}\right)=A^{**}$ یا $Z_1^{w\ell}\left(A^{**}\right)=A$.

در زیر مثال‌هایی از تعدادی جبرهای باناخ مانند A داده شده است که بعضی از آن‌ها آرنز منظم یا قویاً آرنز نامنظم چپ هستند، در حالی که $Z_1^{w\ell}\left(A^{**}\right)$ در بعضی مواقع برابر A^{**} باشد و در بعضی موارد مخالف آن است.

(i) فرض کنیم که A یک جبر باناخ غیر انعکاسی و آرنز منظم‌پذیر باشد و A^{**} شامل همانی چپ باشد. در این صورت داریم $Z_1^{w\ell}\left(A^{**}\right)\neq A^{**}$.

(ii) اگر G یک گروه متناهی باشد، آنگاه واضح است که $Z_1^{w\ell}\left(L^1(G)^{**}\right)=L^1(G)^{**}$ و $Z_1^{w\ell}\left(M(G)^{**}\right)=M(G)^{**}$، در حالی که اگر G یک گروه موضعاً فشرده نامتناهی باشد در این صورت $L^1(G)$ و همچنین تحت شرائطی خاص، $M(G)$ قویاً آرنز نامنظم چپ هستند برای اطلاعات بیش‌تر [۵]، [۷] را مشاهده فرمائید. در حالی که ما داریم

$$Z^{w\ell}_1\left(M(G)^{**}\right)\neq M(G) \text{ و } Z^{w\ell}_1\left(L^1(G)^{**}\right)\neq L^1(G).$$

قضیه ۱-۲: فرض کنید A یک جبر باناخ باشد و $B\subseteq A^{**}$.

(i) اگر $A^{***}B\subseteq A^{*}$ در این صورت $B\subseteq Z_1^{w\ell}\left(A^{**}\right)$.

(ii) اگر $BA^{***}\subseteq A^{*}$ در این صورت $B\subseteq Z_1^{wr}\left(A^{**}\right)$.

برهان: (i) فرض کنید $b\in B$ و فرض کنید تور $(a''_\alpha)_\alpha\subseteq A^{**}$ طوری باشد که $a''_\alpha\xrightarrow{w^*}a''$. در این صورت نشان می‌دهیم که $ba''_\alpha\xrightarrow{w}ba''$. فرض کنید $a'''\in A^{***}$. از این که $A^{***}B\subseteq A^{*}$ در این صورت خواهیم داشت $a'''b\in A^{*}$. در نتیجه داریم

$$\left\langle a''',ba''_\alpha\right\rangle=\left\langle a'''b,a''_\alpha\right\rangle=\left\langle a''_\alpha,a'''b\right\rangle\to\left\langle a''',ba''\right\rangle.$$

(ii) برهان این قسمت شبیه برهان قسمت (i) است.

نتیجه ۲-۲: فرض کنید A یک جبر باناخ باشد در این صورت این جملات را داریم:.

(i) اگر $A^{***}A^{**}\subseteq A^{*}$ در این صورت خواهیم داشت $Z_1^{w\ell}\left(A^{**}\right)=Z_1\left(A^{**}\right)=A^{**}$.

(ii) اگر $A^{**}A^{***}\subseteq A^{*}$ در این صورت خواهیم داشت $Z_1^{wr}\left(A^{**}\right)=A^{**}$.

برهان: در قضیه قبل کافی است قرار دهیم $B=A^{**}$.

قضیه ۳-۲: فرض کنید A یک جبر باناخ و $B\subseteq A^{**}$. در این صورت روابط ذیل را خواهیم داشت:

(i) $BZ_1^{w\ell}\left(A^{**}\right)\subseteq Z_1^{w\ell}\left(A^{**}\right)$.

(ii) $Z_1^{wr}\left(A^{**}\right)B\subseteq Z_1^{wr}\left(A^{**}\right)$.

برهان: (i) فرض کنیم $a''\in Z_1^{w\ell}\left(A^{**}\right)$ و $b''\in B$. فرض کنیم $a'''\in A^{***}$ و $c''\in A^{**}$، تور $(c''_\alpha)_\alpha\subseteq A^{**}$ موجود باشد که $c''_\alpha\xrightarrow{w^*}c''$. در این صورت داریم:

$$\langle a''', b''a''c''_\alpha\rangle = \langle a'''b'', a''c''_\alpha\rangle \to \langle a'''b'', a''c''\rangle = \langle a''', b''a''c''\rangle.$$

در نتیجه نگاشت $c'' \to b''a''c''$ برای هر $a'' \in Z_1^{w\ell}(A^{**})$ و $b'' \in B$ یک نگاشت ضعیف ستاره- ضعیف پیوسته است و بنا بر این خواهیم داشت $b''a'' \in Z_1^{w\ell}(A^{**})$. در این صورت داریم:

$$BZ_1^{w\ell}(A^{**}) \subseteq Z_1^{w\ell}(A^{**}).$$

(ii) برهان مشابه حالت (i) است.

نتیجه ۴-۲: فرض کنید A یک جبر باناخ باشد. در این صورت گزاره‌های ذیل را خواهیم داشت:

(i) اگر $Z_1^{w\ell}(A^{**}) = A$، در این صورت A یک ایده‌آل راست برای A^{**} است.

(ii) اگر $Z_1^{wr}(A^{**}) = A$، در این صورت A یک ایده‌آل چپ برای A^{**} است.

(iii) اگر $Z_1^{w\ell}(A^{**}) = Z_1^{wr}(A^{**}) = A$، آنگاه A یک ایده‌آل در A^{**} است.

تعریف ۵-۲: فرض کنید A یک جبر باناخ باشد. در این صورت $\widetilde{wap}(A)$ را به‌عنوان زیر مجموعه‌ای از A^{**} به شکل ذیل تعریف می‌کنیم.

$\widetilde{wap}(A) = \{a'' \in A^{**}$: برای هر $a'' \in A^{**}$، نگاشت $a'''a'' : A^{**} \to \mathbb{C}$ ضعیف ستاره پیوسته است$\}$.

واضح است که $\widetilde{wap}_\ell(A) = A^{***}$ اگر و تنها اگر $Z_1^{w\ell}(A^{**}) = A^{**}$. بدین ترتیب در صورتی که $\widetilde{wap}(A) = A^{***}$ خواهیم داشت $wap(A) = A^*$ و لذا A یک جبر باناخ آرنز منظم خواهد بود. به آسانی می‌توان نشان داد که $\widetilde{wap}_\ell(A) = wap(A)$ اگر و تنها اگر $Z_1^{w\ell}(A^{**}) = Z_1(A^{**})$. تعریف $\widetilde{wap}_r(A)$ به صورت مشابه است.

قضیه ۶-۲: فرض کنیم A یک جبر باناخ باشد. در این صورت گزاره‌های ذیل را خواهیم داشت:

(i) اگر $A^{***}A^{**} \subseteq \widetilde{wap}_\ell(A)$، آنگاه $Z_1^{w\ell}(A^{**}) = Z_1(A^{**}) = A^{**}$.

(ii) اگر $A^{**} = A^{**}Z_1^{w\ell}(A^{**})$، خواهیم داشت $A^{***}A^{**} \subseteq \widetilde{wap}_\ell(A)$.

برهان: i) فرض کنیم $a'' \in A^{**}$ و تور $(b''_\alpha)_\alpha \subseteq A^{**}$ طوری باشد که $b''_\alpha \xrightarrow{w^*} b''$. فرض کنیم که $a''' \in A^{***}$ در این صورت از این که $A^{***}A^{**} \subseteq wap_\ell(A)$ خواهیم داشت:

$$\langle a''', a''b''_\alpha\rangle = \langle a'''a'', b''_\alpha\rangle \to \langle a'''a'', b''\rangle = \langle a''', a''b''\rangle.$$

بنا بر این خواهیم داشت $a'' \in Z_1^{w\ell}(A^{**})$ و در نتیجه $A^{**} = Z_1^{w\ell}(A^{**})$.

از این که $Z_1^{w\ell}(A^{**}) \subseteq Z_1(A^{**})$ در این صورت حکم برقرار است.

(ii) فرض کنیم $a'' \in A^{**}$ و $a''' \in A^{***}$. از این که $A^{**} = A^{**}Z_1^{w\ell}(A^{**})$ در این صورت $b'' \in A^{**}$ و $c'' \in Z_1^{w\ell}(A^{**})$ موجود هستند به‌طوری که $a'' = b''c''$. فرض کنیم تور $(d''_\alpha)_\alpha \subseteq A^{**}$ طوری باشد که $d''_\alpha \xrightarrow{w^*} d''$ در A^{**}. در نتیجه خواهیم داشت:

$$\langle a'''a'', d''_\alpha\rangle = \langle a'''(b''c''), d''_\alpha\rangle = \langle a'''b'', c''d''_\alpha\rangle \to \langle a'''b'', c''d''\rangle = \langle a'''a'', d''\rangle.$$

در نتیجه نگاشت $(a'''a'')c'' : A^{**} \to \mathbb{C}$ ضعیف ستاره پیوسته خواهد بود. بنا بر این $a'''a'' \subseteq \widetilde{wap}_{\ell}(A)$.

نتیجه ۷-۲: فرض کنیم A یک جبر باناخ باشد. در این صورت اگر $A^{**} = A^{**}Z_1^{w\ell}\left(A^{**}\right)$، آنگاه داریم: $Z_1^{w\ell}\left(A^{**}\right) = Z_1\left(A^{**}\right) = A^{**}$.

برهان: از این که $wap(a) = \widetilde{wap}(A)$، در نتیجه با استفاده از قضیه قبل حکم برقرار خواهد بود.

نتیجه ۸-۲: فرض کنیم A یک جبر باناخ باشد. در این صورت اگر $A^{***}A^{**} \subseteq wap\left(A\right)$، آنگاه داریم: $Z_1^{w\ell}\left(A^{**}\right) = Z_1\left(A^{**}\right) = A^{**}$.

نتیجه ۹-۲: فرض کنیم A یک جبر باناخ باشد و B زیر فضایی از A^{**} باشد. در این صورت اگر $B = BZ_1^{w\ell}\left(B\right)$، آنگاه نتیجه می‌گیریم $Z_1^{w\ell}\left(B\right) = Z_1\left(B\right) = B$.

مسئله: اگر G یگ گروه موضعاً فشرده باشد مطلوب است تعیین $Z_i^{w\ell}\left(L^1\left(G\right)^{**}\right)$ و $Z_i^{w\ell}\left(M\left(G\right)^{**}\right)$ برای $i = 1, 2$؟

منابع

1. R. E. Arens, "The adjoint of a bilinear operation", Proc. Amer. Math. Soc. 2 (1951) 839-848.

2. F. F. Bonsall, J. Duncan, "Complete normed algebras", Springer-Verlag, Berlin (1973).

3. H. G. Dales, "Banach algebra and automatic continuity", Oxford (2000).

4. A. T. Lau, V. Losert, "On the second Conjugate Algebra of locally compact groups", J. London Math. Soc. 37 (2) (1988) 468-480.

5. A. T. Lau, A. Ulger, "Topological center of certain dual algebras", Trans. Amer. Math. Soc. 384 (3) (1996) 1191-1212.

6. S. Mohamadzadeh, H. R. E. Vishki, "Arense regularity of module actions and the second adjoint of a derivation", Bulletin of the Australian Mathematical Society, 77 (2008) 465-476.

7. M. Neufang, "On a conjecture by Ghahramani-Lau and related problem concerning topological center", Journal of Functional Analysis, 224 (2005) 217-229.

8. J. S. Pym, "The convolution of functional on spaces of bounded functions", Proc. London Math. Soc. 15 (1965) 84-104.

9. N. Young, "The irregularity of multiplication in group algebra", Quart. J. Math. Oxford, 24 (2) (1973) 59-62.

10. A. Ulger, "Some stability properties of Arens regular bilinear operators", Proc. Amer. Math. Soc. 34 (1991) 443-454.