

ساخت موجک‌های چندجمله‌ای با استفاده از حالت‌های همدوس تعمیم‌یافته

زهرا بهرامی*، علی مهدی‌فر؛
دانشگاه شهرکرد، دانشکده علوم، گروه فیزیک

چکیده

در این مقاله به معرفی ارتباط بین حالت‌های همدوس و موجک‌ها می‌پردازیم. بدین منظور ابتدا حالت‌های همدوس استاندارد، حالت‌های همدوس تعمیم‌یافته و حالت‌های همدوس غیرخطی را معرفی کرده و ویژگی هر یک را بیان می‌کنیم. سپس حالت‌های همدوس غیرخطی نوسان‌گر هماهنگ دویبعدی روی سطح تخت را بررسی کرده و رابطه تفکیک واحد مربوط به آن را بیان می‌کنیم. در مرحله بعد با استفاده از نمادگذاری دیراک به بررسی شرط پذیرفتنی موجک مادر می‌پردازیم. سپس با استفاده از رابطه تفکیک واحد حالت‌های همدوس تعمیم‌یافته، حالت‌های همدوس غیرخطی و شرط پذیرفتنی، رابطه کلی برای به‌دست آوردن موجک‌های چندجمله‌ای ارائه خواهیم کرد. در نهایت، به‌عنوان نمونه موجک‌های چندجمله‌ای مرتبط با حالت‌های همدوس غیرخطی روی سطح تخت را نیز به‌دست می‌آوریم.

مقدمه

تبدیل فوریه به‌عنوان قدیمی‌ترین ابزار تبدیل سیگنال، قادر به انتقال سیگنال دریافتی از حوزه زمان به حوزه بسامد است. این تبدیل فاقد هرگونه اطلاعاتی در مورد زمان وقوع هر بسامد است. به‌عبارت‌دیگر، در این تبدیل اطلاعات وابسته به زمان، به‌طور کامل حذف می‌شود [۱]. برای تصحیح این اشکال، گابور با ابداع روشی جدید، تبدیل فوریه را فقط برای محدوده زمانی کوچکی از سیگنال دریافتی به‌کار برد و این محدوده را پنجره زمانی نامید. گابور با حرکت پنجره مزبور در طول زمان سیگنال دریافتی، تبدیل فوریه هر قسمت را محاسبه و آن‌را تبدیل فوریه پنجره‌ای نامید. در عین حال، این تبدیل دارای محدودیت ثابت بودن عرض پنجره است، که منجر به عدم طبقه‌بندی بسامدهایی با طول زمانی متفاوت می‌شود [۲].

تبدیل موجک، روشی مشابه با تبدیل فوریه پنجره‌ای است، با این تفاوت که پنجره استفاده شده ابعاد و زمان‌های قرارگیری متفاوت دارد. در حقیقت، در تبدیل موجک بین ابعاد پنجره و بسامد تشخیص داده شده به‌نوعی ارتباط منطقی وجود دارد، به‌طوری‌که هر چه ابعاد پنجره کوچک‌تر باشد، موجک به شکل فشرده‌تری ظاهر شده و منجر به آشکارسازی جزئیات بیش‌تری از سیگنال می‌شود. از سوی دیگر مشابه روش تبدیل فوریه پنجره‌ای، جابه‌جایی پنجره باعث تشخیص نواحی مختلف بسامد می‌شود. در مجموع این روش منجر به معرفی یک دیدگاه زمان-بسامد از سیگنال می‌شود [۳].

واژه‌های کلیدی: تبدیل موجک، حالت‌های همدوس غیرخطی، رابطه تفکیک واحد، شرط پذیرفتنی.

پذیرش ۹۲/۱۱/۱

دریافت ۹۱/۹/۱۸

zz.bahramii@yahoo.com

نویسنده مسنول

موجک‌ها دسته‌ای از توابع ریاضی هستند که حدود سی سال است بررسی و تحقیق در زمینه آن به‌طور جدی شروع شده است. موجک‌ها نمونه‌های انتقال یافته و مقیاس شده یک تابع به نام موجک مادر هستند که از نظر ریاضی باید شرط پذیرفتنی را ارضا کنند. از نمونه‌های موجک می‌توان به موجک هار، موجک میر، موجک مورله و موجک کلاه مکزیکی اشاره کرد. یکی از مهم‌ترین مشکلات اولیه در کاربرد عملی از تبدیلات موجک، انتخاب مناسب موجک مادر است که در مواردی با سعی و خطا و توسط شبیه‌سازی‌های گوناگون، بهترین و کارآمدترین موجک مادر انتخاب می‌گردد [۴]، [۵]، [۶].

از طرف دیگر، حالت‌های همدوس نوسان‌گر هماهنگ نقش بسیار مهمی در بسیاری از شاخه‌های فیزیک نوین به‌ویژه مکانیک کوانتومی دارند. به‌طور کلی هامیلتونی این سامانه بر حسب عملگرهای آفرینش و نابودی بیان می‌شود، که این عملگرها از جبر ویل-هایزنبرگ تبعیت می‌کنند. در سال‌های اخیر تلاش‌های زیادی برای تعمیم حالت‌های همدوس از جنبه‌های مختلف صورت گرفته است. حالت‌های همدوسی که در این مقاله بدان می‌پردازیم، حالت‌های همدوس تعمیم‌یافته، دارای رابطه تفکیک واحد و حالت‌های همدوس غیرخطی به‌عنوان یک حالت خاص حالت‌های همدوس غیرخطی روی سطح تخت هستند.

در این مقاله، ابتدا حالت‌های همدوس تعمیم‌یافته و غیرخطی را تعریف کرده و سپس حالت‌های همدوس روی سطح تخت را به تفصیل بیان می‌کنیم. در بخش بعد شرط پذیرفتنی موجک مادر را در نمادگذاری دیراک توضیح می‌دهیم. در ادامه با استفاده از حالت‌های همدوس تعمیم‌یافته و حالت‌های همدوس غیرخطی به ساخت موجک‌های چندجمله‌ای می‌پردازیم. سپس به‌عنوان نمونه، موجک‌های چندجمله‌ای را با استفاده از حالت‌های همدوس روی سطح تخت به‌دست می‌آوریم.

۱. حالت‌های همدوس استاندارد، حالت‌های همدوس تعمیم‌یافته و حالت‌های همدوس غیرخطی

۱-۱. حالت‌های همدوس استاندارد

حالت‌های همدوس در ضمن بررسی نوسان‌گر هماهنگ و هم‌زمان با تولد مکانیک کوانتومی به‌وسیله شرویدینگر معرفی شد [۷]، [۸]. ساختار نوسان‌گر هماهنگ از جمله مباحث عمده در بسیاری از حوزه‌های فیزیک مدرن به‌ویژه مکانیک کوانتومی به‌شمار می‌آید. یک نوسان‌گر هماهنگ کوانتومی با عملگرهای آفرینش و نابودی \hat{a}^\dagger و \hat{a} توصیف شده که کنش این عملگرها روی فضای فوک،

$$\{|n\rangle, \langle m|n\rangle = \delta_{m,n}; m, n \in N\}_{n=0}^{\infty} \quad (1)$$

بدین‌صورت است:

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \quad (2)$$

که در آن $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ عملگر عددی است. این عملگرها از جبر ویل-هایزنبرگ پیروی می‌کنند،

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{I}, \quad [\hat{a}, \hat{n}] = \hat{a}, \quad [\hat{a}^\dagger, \hat{n}] = -\hat{a}^\dagger. \quad (3)$$

حالت‌های همدوس استاندارد به صورت ویژه حالت‌های عملگر نابودی \hat{a} تعریف می‌شوند که با استفاده از نحوه

کنش این عملگر [رابطه (۲)]، حالت‌های مزبور بدین صورت به دست می‌آیند:

$$\hat{a}|z\rangle = z|z\rangle,$$

$$|z\rangle = \exp\left(-\frac{|z|^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad (4)$$

$$\langle z|z\rangle = 1$$

۲-۱. ویژگی‌های حالت‌های همدوس استاندارد

از جمله ویژگی‌های حالت‌های همدوس استاندارد می‌توان به این موارد اشاره کرد:

۱. خانواده حالت‌های همدوس استاندارد، رابطه تفکیک واحد^۱ را بدین صورت ارضا می‌کنند:

$$\frac{1}{\pi} \int_C d^2z |z\rangle \langle z| = \hat{I}, \quad d^2z = |z| d|z| d\theta, \quad (5)$$

که در آن انتگرال‌گیری روی تمام صفحه اعداد مختلط صورت می‌گیرد

۲. حالت‌های همدوس نامتعاملند،

$$\langle z|z'\rangle = \exp|z - z'|^2. \quad (6)$$

اغلب ترکیب دو ویژگی بالا، با عنوان «آبرکامل بودن» مطرح می‌شود.

۳. برای حالت همدوس استاندارد، حاصل ضرب نامعینی‌های (Δx) و (Δp) کران پایین اصل عدم قطعیت را

برآورده می‌کند،

$$(\Delta x)(\Delta p) = \frac{1}{2}. \quad (7)$$

۳-۱. تعمیم حالت‌های همدوس

حالت‌های همدوس نوسانگر هماهنگ به روش‌های گوناگونی تعمیم یافته‌اند، که گام‌های مهمی در جهت گسترش

این نظریه هستند. از جمله این تعمیم‌ها می‌توان به این موارد اشاره کرد [۹]:

۱. تعمیم‌های دینامیکی: مبتنی بر پتانسیل‌های متفاوت با پتانسیل نوسانگر هماهنگ.

۲. تعمیم‌های تقارنی: بر اساس نظریه گروه‌ها.

۳. تعمیم‌های جبری: متناظر با تغییر شکل جبر نوسانگر هماهنگ.

مهم‌ترین ویژگی حالت‌های همدوس تعمیم‌یافته $|z\rangle_g$ ، دارا بودن رابطه تفکیک واحد بدین صورت است:

$$\int d\mu_z |z\rangle_g \langle z| = \hat{I}, \quad (8)$$

که در آن $d\mu_z$ یک سنج مناسب است [۱۰]، [۱۱].

از جمله تعمیم‌های جبری حالت‌های همدوس، حالت‌های همدوس غیرخطی هستند. برای رسیدن به این

حالت‌ها عملگرهای جبر نوسانگر تغییر شکل یافته را بدین صورت در نظر می‌گیریم [۱۲]:

۱. Resolution of the identity

$$\begin{aligned}\hat{A} &= \hat{a} f(\hat{n}) = f(\hat{n}+1) \hat{a}, \\ \hat{A}^\dagger &= f^\dagger(\hat{n}) \hat{a}^\dagger = \hat{a}^\dagger f^\dagger(\hat{n}+1),\end{aligned}\tag{9}$$

که برای آن‌ها داریم،

$$\begin{aligned}[\hat{A}, \hat{A}^\dagger] &= (\hat{n}+1) f(\hat{n}+1) f^\dagger(\hat{n}+1) - \hat{n} f(\hat{n}) f^\dagger(\hat{n}), \\ [\hat{A}, \hat{n}] &= \hat{A}, \quad [\hat{A}^\dagger, \hat{n}] = -\hat{A}^\dagger.\end{aligned}\tag{10}$$

در این صورت نمایش حالت‌های همدوس غیرخطی در پایه حالت‌های عددی بدین صورت به دست می‌آید:

$$|z, f\rangle = N_f \left(|z|^\nu\right)^{-\frac{1}{\nu}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!} [f(n)]!} |n\rangle, \quad z \in C,\tag{11}$$

که در آن ضریب بهنجارش N_f با این معادله بیان می‌شود:

$$N_f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^{\nu n}}{n! ([f(n)]!)^\nu}.\tag{12}$$

و $[f(n)]!$ بنا به تعریف برابر است با:

$$[f(n)]! = f(0) f(1) \dots f(n), \quad [f(0)]! = 1.\tag{13}$$

حالت‌های همدوس غیرخطی نوسان‌گر هماهنگ روی سطح تخت

به منظور بررسی ارتباط میان تابع تغییر شکل در نظریه حالت‌های همدوس غیرخطی و ساختار هندسی فضای فیزیکی، یک نوسان‌گر دوبعدی روی سطح تخت در نظر می‌گیریم. با مقایسه جبر این نوسان‌گر با جبر نوسان‌گر تغییر شکل یافته (۱۰) معلوم می‌شود که نوسان‌گر دوبعدی مزبور را می‌توان به عنوان نوسان‌گر هماهنگ یک بعدی تغییر شکل یافته‌ای با تابع تغییر شکل

$$f(\hat{n}) = \sqrt{(N+1-\hat{n})},\tag{14}$$

در نظر گرفت که در این جا N بعد فضای فوک متناهی مربوط به جبر نوسان‌گر هماهنگ روی سطح تخت است [۱۲]. با توجه به محدود بودن حالت‌های عددی در فضای هیلبرت با بعد متناهی، حالت‌های همدوس با بعد متناهی را می‌توانیم از قطع کردن حالت‌های همدوس استاندارد در فضای هیلبرت با بعد نامتناهی به دست آوریم [۱۳]، [۱۴]. بر این اساس با استفاده از رابطه (۹) حالت‌های همدوس متناهی متناظر با نوسان‌گر هماهنگ دوبعدی روی سطح تخت به دست می‌آید،

$$\begin{aligned}|z\rangle_f &= (1+|z|^\nu)^{-\frac{N}{\nu}} \exp(z \hat{A}^\dagger) |\cdot\rangle \\ &= (1+|z|^\nu)^{-\frac{N}{\nu}} \sum_{n=0}^N \sqrt{\binom{N}{n}} z^n |n\rangle,\end{aligned}\tag{15}$$

که در آن z نشان‌دهنده دامنه حالت همدوس است و عددی مختلط است. نشان داده شده است که رابطه تفکیک واحد برای حالت‌های همدوس غیرخطی روی فضای تخت نیز بدین صورت به دست می‌آید [۱۲]:

$$\frac{N+1}{\pi} \int \frac{d^N z}{(1+|z|^2)^{N+1}} |z\rangle_f \langle z| = \hat{I}. \quad (16)$$

بدین‌ترتیب، حالت‌های همدوس روی سطح تخت به‌دست آمده یک مجموعهٔ آبر کامل است و رابطهٔ تفکیک واحد مربوط به آن‌ها ابزاری مناسب برای ارتباط با موجک‌ها در بخش‌های بعد خواهد بود.

موجک‌ها و شرط پذیرفتنی آن‌ها در نمادگذاری دیراک

تبدیل انتگرالی موجک از تابع f ، بدین‌صورت تعریف می‌شود [۱۵]:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(a,b) &\equiv |a|^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^* \left(\frac{x-b}{a} \right) f(x) \\ &\equiv \langle \psi_{a,b} | f \rangle \equiv \psi_{a,b}^\dagger f. \end{aligned} \quad (17)$$

در این رابطه تابع ψ ، موجک مادر^۱ نام دارد و $\psi_{a,b}$ نیز بدین‌صورت تعریف می‌شود:

$$\psi_{a,b} \equiv |a|^{-\frac{1}{2}} \psi \left(\frac{x-b}{a} \right), \quad a \neq 0. \quad (18)$$

در رابطه (۱۷) توابع f و $\psi_{a,b}^*$ متعلق به $L^2(R)$ است و a پارامتر مقیاس و b پارامتر انتقال است. برای آن‌که بتوان وارون تبدیل موجک را تعریف کرد، موجک ψ باید در این شرط پذیرفتنی^۲ صدق کند [۱۶]، [۱۷]:

$$C_\psi \equiv 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{|\omega|} |\hat{\psi}(\omega)|^2 < \infty, \quad (19)$$

که در آن $\hat{\psi}(\omega)$ تبدیل فوریهٔ $\psi(x)$ است. این شرط را می‌توان به‌صورت $\hat{\psi}(0) = 0$ نیز نوشت که تبدیل فوریهٔ آن، بدین‌صورت بیان می‌شود:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \psi(x) = 0. \quad (20)$$

اگر $\psi(x)$ تابع فردی از x باشد، رابطهٔ بالا همواره برقرار است. از توابع زوجی که شرط پذیرفتنی را ارضا می‌کند، می‌توان به‌عنوان نمونه، موجک کلاه مکزیکی^۳ را نام برد،

$$\psi_M(x) = \pi^{-\frac{1}{2}} (1-x^2) e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (21)$$

موجک کلاه مکزیکی یکی از ساده‌ترین موجک‌های شناخته شده است. این موجک مشتق دوم یک تابع گوسی است و تبدیل فوریهٔ آن به‌صورت $\hat{\psi}(\omega) = C' \omega^2 \exp\left(-\frac{1}{2}\omega^2\right)$ است. نامگذاری این موجک بدین دلیل است که اگر

این تابع را حول محور تقارنش بچرخانیم شکلی شبیه به کلاه مکزیکی به‌دست می‌آید. با توجه به حساسیت این موجک به تکنیکی‌های موجود در سیگنال، از این موجک در تحلیل زمان-مقیاس تکنیکی‌های سیگنال‌ها استفاده می‌گردد [۱۸]. از دیگر کاربردهای موجک مزبور می‌توان به تحلیل سیگنال‌های زمین‌لرزه [۱۹] و بازسازی میکرو موجی آسمان [۲۰] اشاره کرد.

۱. Mother Wavelet

۲. Admissibility condition

۳. Mexican hat wavelet

با توجه به تعریف $|p\rangle$ در مکانیک کوانتومی و در نمایش دیراک، داریم [۲۱]، [۲۲]:

$$|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ipx} |x\rangle. \quad (22)$$

از رابطه بالا در حالت $p=0$ این رابطه به دست می‌آید:

$$|p=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx |x\rangle. \quad (23)$$

در این صورت، شرط پذیرفتنی (۲۰) در نمادگذاری دیراک بدین صورت به دست می‌آید [۱۸]:

$$\langle p=0|\psi\rangle = 0. \quad (24)$$

بنا بر این هر تابعی که در شرط بالا صدق کند، یک موجک خواهد بود.

۱. رابطه‌ای کلی برای به دست آوردن موجک‌های چندجمله‌ای

برای یافتن توابع زوجی که در شرط پذیرفتنی (۲۴) صدق می‌کنند (موجک باشند)، $|\psi\rangle$ را بر حسب

حالت‌های عددی بسط می‌دهیم،

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} B_n |n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle, \quad (25)$$

که در آن از رابطه $|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle$ استفاده کرده و داریم، $C_n = \frac{B_n}{\sqrt{n!}}$ ، بنا بر این کافی است C_n ها را به گونه‌ای

انتخاب کنیم که $|\psi\rangle$ شرط پذیرفتنی را ارضا کند.

از طرف دیگر، چنان‌که در بخش ۱ بیان شد، اگر حالت همدوس تعمیم‌یافته را به صورت $|z\rangle_g$ در نظر بگیریم،

با وارد کردن رابطه تفکیک واحد کلی (۸) در شرط پذیرفتنی (۲۴) داریم:

$$\langle p=0|\psi\rangle = \int d\mu_z \langle p=0|z\rangle_g \langle z|\psi\rangle = 0. \quad (26)$$

همچنین در نمایش دیراک داریم [۲۳]:

$$|p\rangle = \pi^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} p^\dagger + \sqrt{2} ip \hat{a}^\dagger + \frac{\hat{a}^{\dagger 2}}{2}\right) |0\rangle, \quad (27)$$

و در حالت خاص $p=0$ ،

$$|p=0\rangle = \pi^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{\hat{a}^{\dagger 2}}{2}\right) |0\rangle = \pi^{-\frac{1}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\hat{a}^{\dagger 2}/2)^m}{m!} |0\rangle. \quad (28)$$

با استفاده از رابطه بالا داریم،

$$\langle p=0|z\rangle_g = \pi^{-\frac{1}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m m!} \langle 0|\hat{a}^{2m}|z\rangle_g. \quad (29)$$

با استفاده از رابطه (۲۵) نیز به دست می‌آید:

$$\langle z|\psi\rangle_g = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \langle z|(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle. \quad (30)$$

بنا بر این با جای‌گذاری روابط (۲۹) و (۳۰) در رابطه (۲۶) نتیجه می‌گیریم:

$$\langle p=0|\psi\rangle = \pi^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{C_n}{\sqrt{m} m!} \int d\mu_z \langle \cdot | \hat{a}^{\dagger m} | z \rangle_g \langle z | (\hat{a}^{\dagger})^n | \cdot \rangle = 0. \quad (31)$$

شکل نهایی شرط پذیرفتنی بالا کلی‌ترین رابطه برای به‌دست آوردن موجک‌های چندجمله‌ای با استفاده از حالت‌های همدوس تعمیم‌یافته است. با قرار دادن حالت همدوس $|z\rangle_g$ و سنج $d\mu_z$ مربوط به رابطه تفکیک واحد آن می‌توان موجک‌ها را به‌دست آورد.

۲. رابطه‌ای کلی برای به‌دست آوردن موجک‌های چندجمله‌ای با استفاده از حالت‌های همدوس غیرخطی

چنان‌که در بخش ۱ بیان شد حالت همدوس غیرخطی برحسب حالت‌های عددی، با این رابطه داده می‌شود:

$$|z, f\rangle = N_f (|z|^r)^{-\frac{1}{r}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!} [f(n)]!} |n\rangle, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (32)$$

برای به‌دست آوردن شرط (۳۱) به محاسبه $\langle \cdot | \hat{a}^{\dagger m} | z, f \rangle$ و $\langle z, f | (\hat{a}^{\dagger})^n | \cdot \rangle$ می‌پردازیم،

$$\begin{aligned} \langle \cdot | \hat{a}^{\dagger m} | z, f \rangle &= N_f (|z|^r)^{-\frac{1}{r}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!} [f(n)]!} \langle \cdot | \hat{a}^{\dagger m} | n \rangle \\ &= N_f (|z|^r)^{-\frac{1}{r}} \frac{z^m}{[f(m)]!}, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \langle z, f | (\hat{a}^{\dagger})^n | \cdot \rangle &= N_f (|z|^r)^{-\frac{1}{r}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z^*)^n}{\sqrt{n!} [f(n)]!} \langle n | (\hat{a}^{\dagger})^n | \cdot \rangle \\ &= N_f (|z|^r)^{-\frac{1}{r}} \frac{(z^*)^n}{[f(n)]!}. \end{aligned} \quad (34)$$

با قرار دادن روابط (۳۳) و (۳۴) در رابطه (۳۱)، رابطه‌ای کلی برای محاسبه موجک‌های چندجمله‌ای با استفاده از حالت‌های همدوس غیرخطی به‌دست می‌آید:

$$\langle p=0|\psi\rangle = \pi^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{C_n}{\sqrt{m} m!} \frac{1}{[f(n)]! [f(m)]!} \int d\mu_z N_f (|z|^r)^{-1} (z^*)^n z^m = 0. \quad (35)$$

در بخش بعد، به‌عنوان مثال، به محاسبه موجک‌های چندجمله‌ای با استفاده از حالت‌های همدوس غیرخطی نوسانگر هماهنگ روی سطح تخت خواهیم پرداخت.

۳. موجک‌های چندجمله‌ای با استفاده از حالت‌های همدوس غیرخطی نوسانگر هماهنگ روی سطح تخت

چنان‌که در بخش ۱ دیدیم، با توجه به متناهی بودن بعد فضای هیلبرت حالت‌های همدوس $|z\rangle_f$ [رابطه

(۱۵)]، بسط (۲۵) در فضای هیلبرت با بعد متناهی بدین‌صورت است:

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^N B_n |n\rangle = \sum_{n=0}^N C_n (\hat{a}^{\dagger})^n | \cdot \rangle, \quad (36)$$

و چنان‌که گفتیم، C_n ها باید طوری انتخاب شوند که $|\psi\rangle$ شرط پذیرفتنی را ارضا کند.

با وارد کردن رابطه تفکیک واحد (۱۶) در شرط پذیرفتنی (۲۴) داریم،

$$\langle p=0|\psi\rangle = \frac{N+1}{\pi} \int \frac{d^r z}{(1+|z|^r)^r} \langle p=0|z\rangle_f \langle z|\psi\rangle = 0. \quad (37)$$

با استفاده از حالت همدوس مربوط به فضای تخت [رابطه (۱۵)] و رابطه (۲۸) داریم:

$$\langle p=0|z\rangle_f = \pi^{-\frac{1}{r}} (1+|z|^r)^{-\frac{N}{r}} \sum_{m=0}^N \frac{z^m}{r^m m!} \sqrt{\frac{N!}{(N-rm)!}}. \quad (38)$$

با به‌کار بردن رابطه حالت همدوس روی سطح تخت و معادله (۳۶) نیز به‌دست می‌آید:

$$\langle z|\psi\rangle_f = (1+|z|^r)^{-\frac{N}{r}} \sum_{n=0}^N C_n (z^*)^n \sqrt{\frac{N!}{(N-n)!}}. \quad (39)$$

حال با جای‌گذاری روابط بالا در رابطه (۳۷) نتیجه می‌گیریم:

$$\langle p=0|\psi\rangle = \frac{N+1}{\pi^{\frac{1}{r}}} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^N \frac{C_n}{r^m m!} \frac{N!}{\sqrt{(N-n)!(N-rm)!}} \int d^r z \frac{(z^*)^n z^m}{(1+|z|^r)^{(N+r)}} = 0. \quad (40)$$

با توجه به این نکته که z عددی مختلط است و با استفاده از جداول انتگرال‌گیری [۲۴]، جواب انتگرال بالا بدین صورت به‌دست می‌آید:

$$\int d^2 z \frac{(z^*)^n z^m}{(1+|z|^r)^{(N+r)}} = \pi \delta_{r m, n} \frac{(r m)!(N-r m)!}{(N+1)!}. \quad (41)$$

با جای‌گذاری جواب انتگرال در رابطه (۴۰) نتیجه بدین‌صورت حاصل می‌شود:

$$\langle p=0|\psi\rangle = \pi^{-\frac{1}{r}} \sum_{n=0}^N \frac{(r n)!}{n! r^n} C_{r n} = 0. \quad (42)$$

بدیده می‌شود که این رابطه تنها روی ضرایب حالت‌های عددی زوج قید وارد می‌کند که با توجه به شرط پذیرفتنی (۲۰) که برای توابع فرد به‌صورت بدیهی برقرار است، قابل توجیه است.

محاسبات

در ادامه با مشخص کردن چند N خاص (بعد فضای هیلبرت با بعد متناهی)، به‌دنبال موجک‌های زوجی می‌گردیم که در رابطه پذیرفتنی صدق کنند. بدین‌ترتیب، ضرایب حالت‌های عددی فرد، با توجه به این‌که به‌طور بدیهی شرط پذیرفتنی را برآورده می‌کنند، از محاسبات حذف می‌گردند. از رابطه زیر نیز در انجام محاسبات بهره می‌گیریم [۲۱]، [۲۲]:

$$\langle x|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{r^n n!} \sqrt{\pi}} H_n(x) e^{-\frac{x^r}{r}}, \quad (43)$$

که در آن، $H_n(x)$ ها چندجمله‌ای‌های هرمیت هستند،

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^r} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^r}. \quad (44)$$

همچنین، از آن‌جاکه روی ضرایب فرد قیدی وجود ندارد، برای سادگی در محاسبات آن‌ها را صفر در نظر می‌گیریم.

در انجام محاسبات این مراحل را طی می‌کنیم:

- (۱) ابتدا مقدار N را تعیین می‌کنیم.
- (۲) با استفاده از معادله (۴۲)، رابطه بین ضرایب $C_{\nu n}$ را می‌نویسیم.
- (۳) در این مرحله با استفاده از رابطه (۳۶)، $|\psi\rangle$ را با توجه به N تعیین شده، بسط می‌دهیم.
- (۴) اکنون با توجه به تعریف $\psi(x)$ (که ضرب داخلی $|\psi\rangle$ در $\langle x|$ است)، رابطه (۴۳) و $|\psi\rangle$ ، به موجک $\psi(x)$ بر حسب توابع هرمیت خواهیم رسید.
- (۵) حال با توجه به رابطه بین ضرایب و با صفر قرار دادن $C_{\nu n}$ هایی که $2n > N$ است، بقیه ضرایب را تعیین می‌کنیم.

(۶) سرانجام با توجه به ضرایب تعیین شده، تعریف چندجمله‌ای‌های هرمیت [رابطه (۴۴)] و $\psi(x)$ به دست آمده بر حسب توابع هرمیت، تابع $\psi(x)$ که همان موجک مورد نظر است، استخراج می‌شود.

در ادامه به عنوان نمونه، توابع $\psi(x)$ را به ازای $N = 0, 1, \dots, 7$ به دست می‌آوریم:

برای $N = 0$ و $N = 1$ تابع $\psi(x) = 0$ به دست می‌آید.

برای $N = 2$ و $N = 3$ نیز با استفاده از رابطه (۳۶) داریم،

$$N = 2 \Rightarrow \begin{cases} C_0 + C_2 + 3C_4 = 0, \\ |\psi\rangle = C_0|0\rangle + C_2|2\rangle + \sqrt{2!}C_4|4\rangle, \\ \psi(x) = \langle x|\psi\rangle = C_0\langle x|0\rangle + \sqrt{2!}C_2\langle x|2\rangle \\ = \pi^{-\frac{1}{2}}C_0H_0(x)e^{-\frac{x^2}{2}} + \pi^{-\frac{1}{2}}\sqrt{2!}C_2H_2(x)e^{-\frac{x^2}{2}}. \end{cases} \quad (45)$$

$$N = 3 \Rightarrow \begin{cases} C_0 + C_2 + 3C_4 + 15C_6 = 0, \\ |\psi\rangle = C_0|0\rangle + C_2|2\rangle + \sqrt{2!}C_4|4\rangle + \sqrt{3!}C_6|6\rangle, \\ \psi(x) = \langle x|\psi\rangle = C_0\langle x|0\rangle + \sqrt{2!}C_2\langle x|2\rangle, \\ \psi(x) = \pi^{-\frac{1}{2}}C_0H_0(x)e^{-\frac{x^2}{2}} + \pi^{-\frac{1}{2}}\sqrt{2!}C_2H_2(x)e^{-\frac{x^2}{2}}. \end{cases} \quad (46)$$

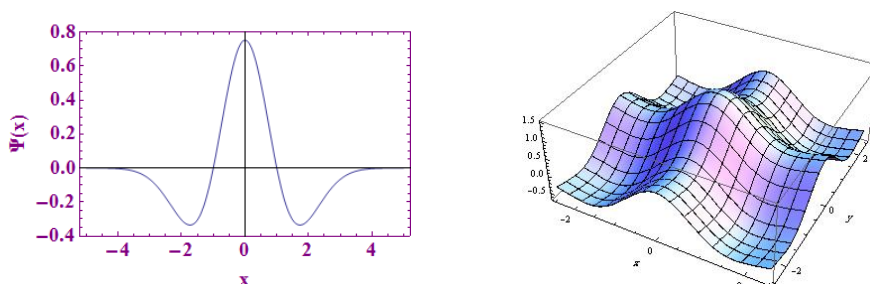
چنان‌که مشاهده می‌شود حالت‌های $N = 2$ و $N = 3$ ، با وجود این‌که $|\psi\rangle$ های متفاوت دارند، دارای $\psi(x)$ یکسان هستند. با انتخاب،

$$\begin{cases} C_0 = -C_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ C_4 = C_6 = 0, \end{cases} \quad (47)$$

و با استفاده از رابطه (۴۴)، نتیجه به دست آمده موجک کلاه مکزیکی خواهد بود،

$$\psi(x) = \pi^{-\frac{1}{2}} (1-x^2) e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad (48)$$

که در شکل ۱ رسم شده است.



شکل ۱. شکل ۲ بعدی و ۳ بعدی موجک کلاه مکزیکی، که به‌ازای $N=2$ و یا $N=3$ به‌دست می‌آید

برای $N=4$ و $N=5$ نیز داریم:
(49)

$$N=4 \Rightarrow \begin{cases} C_0 + C_1 + 3C_2 + 15C_3 + 70C_4 = 0, \\ |\psi\rangle = C_0|\cdot\rangle + C_1|1\rangle + \sqrt{2!}C_2|2\rangle + \sqrt{3!}C_3|3\rangle + \sqrt{4!}C_4|4\rangle, \\ \psi(x) = \langle x|\psi\rangle = C_0\langle x|\cdot\rangle + \sqrt{2!}C_2\langle x|2\rangle + \sqrt{4!}C_4\langle x|4\rangle, \\ \psi(x) = \pi^{-\frac{1}{2}} C_0 H_0(x) e^{-\frac{x^2}{2}} + \pi^{-\frac{1}{2}} \sqrt{2!} C_2 H_2(x) e^{-\frac{x^2}{2}} + \pi^{-\frac{1}{2}} \sqrt{4!} C_4 H_4(x) e^{-\frac{x^2}{2}}. \end{cases} \quad (50)$$

$$N=5 \Rightarrow \begin{cases} C_0 + C_1 + 3C_2 + 15C_3 + 70C_4 + 945C_5 = 0, \\ |\psi\rangle = C_0|\cdot\rangle + C_1|1\rangle + \sqrt{2!}C_2|2\rangle + \sqrt{3!}C_3|3\rangle + \sqrt{4!}C_4|4\rangle + \sqrt{5!}C_5|5\rangle, \\ \psi(x) = \langle x|\psi\rangle = C_0\langle x|\cdot\rangle + \sqrt{2!}C_2\langle x|2\rangle + \sqrt{4!}C_4\langle x|4\rangle, \\ \psi(x) = \pi^{-\frac{1}{2}} C_0 H_0(x) e^{-\frac{x^2}{2}} + \pi^{-\frac{1}{2}} \sqrt{2!} C_2 H_2(x) e^{-\frac{x^2}{2}} + \pi^{-\frac{1}{2}} \sqrt{4!} C_4 H_4(x) e^{-\frac{x^2}{2}}. \end{cases}$$

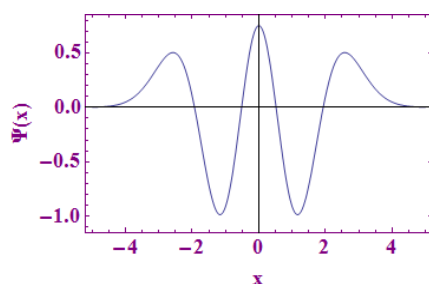
برای حالت مزبور، با انتخاب

$$\begin{cases} C_0 = -1, & C_1 = -2, \\ C_2 = C_3 = C_4 = 0, \end{cases} \quad (51)$$

$C_5 = 1$ به‌دست می‌آید و موجک به‌دست آمده بدین‌صورت است:

$$\psi(x) = \pi^{-\frac{1}{2}} (x^5 - 4x^3 + 1) e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad (52)$$

و در شکل ۲ نشان داده شده است.



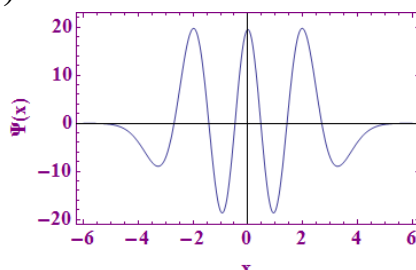
شکل ۲. موجک چندجمله‌ای، که به‌ازای $N=4$ و یا $N=5$ به‌دست می‌آید

با انتخاب $N = 6$ و یا $N = 7$ و تکرار فرایند بالا و با انتخاب،

$$\begin{cases} C_1 = 1, & C_2 = 2, & C_3 = 4, \\ C_4 = C_5 = C_6 = C_7 = 0, \end{cases} \quad (53)$$

$C_7 = -1$ به دست آمده و موجک حاصل بدین صورت است (شکل ۳):

$$\psi(x) = \pi^{-\frac{1}{4}} (-8x^6 + 76x^4 - 134x^2 + 26) e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (54)$$



شکل ۳. موجک چندجمله‌ای، که به ازای $N = 6$ و یا $N = 7$ به دست می‌آید

بدین ترتیب می‌توان با در نظر گرفتن N های گوناگون، توابع موجک زوجی یافت که در شرط پذیرفتنی صدق می‌کنند. از این رو، رابطه (۴۲) را می‌توان برای به دست آوردن چندجمله‌ای‌هایی که شرط موجک بودن را برآورده می‌کند، استفاده نمود.

نتیجه‌گیری

در این مقاله، به معرفی موجک‌ها و حالت‌های همدوس تعمیم‌یافته پرداختیم. سپس با استفاده از حالت‌های همدوس تعمیم‌یافته و حالت‌های همدوس غیرخطی، نمادگذاری دیراک و بهره‌گیری از شرط پذیرفتنی، رابطه‌ای کلی برای موجک‌های چندجمله‌ای یافتیم. سپس به عنوان نمونه به ساخت موجک‌های چندجمله‌ای مرتبط با حالت‌های همدوس غیرخطی روی سطح تخت پرداختیم.

با استفاده از این روش، می‌توان به بررسی موجک‌های چندجمله‌ای دیگر با استفاده از حالت‌های همدوس دارای رابطه تفکیک واحد همانند حالت‌های همدوس گروه $SU(2)$ ، $SU(1,1)$ ، $SU_q(2)$ و $SU_q(1,1)$ پرداخت.

قدردانی

نویسندگان، تشکر خود را از معاونت تحصیلات تکمیلی دانشگاه شهرکرد برای حمایت‌های انجام شده اعلام می‌دارند.

منابع

1. O. Christensen, K. L. Christensen, "Approximation Theory From Taylor Polynomials to Wavelets", Technical University of Denmark, Birkhauser Boston (2004).
2. S. T. Ali, J-P. Antoni, J-P. Gazeau, "Coherent State, Wavelets and Their Generalizations", Springer, New York (2000).

3. W. C. Lang, K. Forinash, "Time-frequency analysis with the continuous wavelet transform", Am. J. Phys. 66, 9 (1998).
4. S. Lahmiri, Int. J. Com. Sci. Eng. App. 1, 13 (2011).
5. J. Rafiee, P. W. Tse, M. H. Sadeghi, Exp. Sys. Appl. 36, 4862 (2009).
6. N. Ahuja, S. Lertratratapanich, N. K. Bose, Proc. Inst. Elec. Eng.-Vis., Signal Process., 152, 659 (2005).
7. E. Shrodinger, Naturwissenschaften 14, 664 (1926).
8. C. H. Hsiao, Int. J. Comp. Math., 87, 3 (2010).
۹. علی مهدی‌فر، ساختار هندسی حالت‌های همدوس غیرخطی، پایان‌نامه دکتري، دانشکده علوم، دانشگاه اصفهان، (۱۳۸۶).
10. A. M. Perelomov, "Generalized Coherent States And Their Applications", Berlin, Springer (1986).
11. W. Hardle, G. Kerkyacharian, "Wavelets, Approximation and Statistical Applications", Seminaire Paris-Berlin, (2010).
12. A. Mahdifar, R. Roknizadeh, M. H. Naderi, J. Phys. A: Math. Gen. 39, 7003 (2006).
13. L. M. Kuang, F. B. Wang, Y. G. Zhou, Phys. Lett. A 183, 1, 1993; J. Mod. opt. 41, 1307 (1994).
14. A. Fitouhi, N. Bettaibi, J. Non. Math. Phys. 13, 3, (2006).
15. J. C. Van den Berg, "Wavelets in physics", Cambridge Univ. press, Cambridge (1999).
16. G. Kaiser, "A friendly guide to wavelets", Massachusetts Univ. Lowell, MA01854 (1994).
17. L-Y. Hu and H-Y. Fan. J. Mod. Opt. 55, 11 (2008).
۱۸. زهرا بهرامی، موجک‌ها و کاربرد آن‌ها در فیزیک اتمی ملکولی، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشکده علوم پایه، دانشگاه شهرکرد، (۱۳۹۰).
19. Z. Zhou, H. Adeli, J. Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering. 18, 379 (2003).
20. R. B. Vielva, M.P. Barreiro; Mon. Not. Royal Astr. Soc. 328, 1 (2001).
21. J. J. Sakurai, "Modern Quantum Mechanics", Addison-Wesley (1994).
22. P. Z. Daffery, H. Kaneko, Appl. Anal..85, 10 (2006).
23. H-Y. Fan, H-L. LU, Optics letters, 31, 407 (2006).
24. I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, "Table of Integrals, Series, and Products", 7nd ed., California, USA, 325, 340 (2007).