

رفتار ترمودینامیکی زنجیره آیزینگ اسپین-۱/۲ با برهمکنش ژایالوشینسکی-موریا

زهرا فیض نژاد؛ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی، دانشکده علوم
سعید مهدوی فر*؛ دانشگاه گیلان، گروه فیزیک

چکیده

زنجیره آیزینگ اسپین-۱/۲ در حضور میدان مغناطیسی و برهمکنش ژایالوشینسکی-موریا در نظر گرفته شده است. ابتدا با استفاده از عملگر دوران مدل مذکور به مدل اسپین-۱/۲ XXZ ناهمسانگرد در میدان مغناطیسی طولی تبدیل و سپس با روش فرمیونیزه کردن و اعمال تقریب میدان متوسط نمایش قطری هامیلتونی سیستم تعیین شده است. سپس رفتار گرمای ویژه آن بررسی شده است. نتایج محاسبه مذکور نشان می‌دهد که بیشینه مقدار گرمای ویژه با افزایش میدان رفتار دوگانه نشان می‌دهد. در نواحی کوچکتر از میدان بحرانی کوانتومی، بیشینه مذکور با افزایش میدان کاهش یافته است اما در نواحی از میدان مغناطیسی که بیشتر از میدان بحرانی کوانتومی است رفتاری معکوس دارد. به علاوه، فرآیند مغناطش سیستم در دمای صفر مطلق بررسی و مشخص شده است که برهمکنش ژایالوشینسکی-موریا فرآیند مغناطش را تحت تأثیر خود قرار می‌دهد.

مقدمه

در سال‌های اخیر خواص فیزیکی به‌ویژه رفتار دمای پایین سیستم‌های مغناطیسی به‌سبب اهمیتی که در طبیعت دارند توجه بسیاری را در فیزیک ماده چگال به‌خود جلب کرده و از مباحث مهم در فیزیک به‌شمار می‌رود. برای توصیف دقیق رفتار فیزیکی این مواد باید تمامی برهمکنش‌ها در نظر گرفته شود که امکان حل دقیق چنین مسئله‌ای در حال حاضر وجود ندارد. در این شرایط برای نمایش برخی ویژگی‌های مغناطیسی مواد از مدل‌های مؤثر اسپینی استفاده می‌شود. به‌طورکلی مدل‌های اسپینی توصیف مناسبی از پدیده‌های مغناطیسی مشاهده شده در مواد را ارائه می‌دهند.

در این بین سیستم‌های اسپینی کم-بعد در دیدگاه نظری فیزیک کوانتوم، کاربردهای مهمی پیدا کرده‌اند. زنجیره اسپینی ۱/۲ هاینبرگ نمونه‌ای از مدل‌های اسپینی کم‌بعد است. به‌ویژه مشخص شد که مغناطیس‌های واقعی می‌توانند به‌صورت یک‌بعدی رفتار کنند که این موضوع انگیزه‌ای برای بررسی سیستم‌های اسپینی یک‌بعدی است [۱]. برهمکنش اسپین-مدار نیز در توصیف رفتار مغناطیسی ماده نقش مهمی بازی می‌کند.

واژه‌های کلیدی: زنجیره آیزینگ، برهمکنش ژایالوشینسکی-موریا، تقریب میدان متوسط، گرمای ویژه، فرآیند مغناطش

پذیرش ۹۳/۲/۷

دریافت ۹۲/۲/۲

نویسنده مسنول mahdavifar@guilan.ac.ir

پیشنهاد شده که برهمکنش ژایالوشینسکی-موریا [۲]، [۳] به‌طور مؤثر می‌تواند نقش اسپین-مدار را در توصیف رفتار مغناطیسی برخی سیستم‌ها تعیین کند [۴]، [۵]، [۶]. در واقع برهمکنش مذکور می‌تواند نظم چرخشی اسپینی در حالت پایه ایجاد کند [۷]. به‌سبب همین ویژگی، به‌عنوان یکی از سناریوهای مهم در توصیف فروالکتریسیته زنجیره‌های اسپینی مالتی فروبیک مطرح شده است [۸]، [۹]. در کنار این موضوع، نقش مهمی نیز در پدیده تشدید اسپین الکترونی برخی پادفرومغناطیس‌های یک-بعدي بازی می‌کند [۴]، [۵]. همچنین باعث تغییر در خواص دینامیکی [۱۰] و در هم‌تنیدگی کوانتومی زنجیره‌های اسپینی [۱۱] می‌شود.

اخیراً به تأثیر برهمکنش ژایالوشینسکی-موریا در مدل آیزینگ اسپین-۱/۲ توجه شده است [۱۲]، [۱۳]. در دمای صفر مطلق، برهمکنش مذکور باعث گذار فاز کوانتومی از فاز نیل به فاز چرخشی می‌شود. در صورتی که قدرت برهمکنش ژایالوشینسکی-موریا با برهمکنش تبدالی یک‌سان شود گذار فاز کوانتومی مذکور روی می‌دهد. پدیده مذکور از نقطه نظر در هم‌تنیدگی ذرات سیستم نیز بررسی و تایید شده است [۱۴]. در این مقاله مدل زنجیره آیزینگ اسپین-۱/۲ در حضور برهمکنش ژایالوشینسکی-موریا و میدان مغناطیسی یکنواخت در نظر گرفته می‌شود. ابتدا با روش فرمیونیز کردن نمایش فرمیونی هامیلتونی سیستم را به‌دست آورده و سپس با استفاده از تقریب میدان متوسط طیف انرژی سیستم محاسبه می‌شود. با مشخص شدن طیف انرژی، رفتار دمایی سیستم بررسی می‌شود.

مدل

هامیلتونی زنجیره آیزینگ پادفرومغناطیس اسپین-۱/۲، در حضور برهمکنش ژایالوشینسکی-موریا و میدان مغناطیسی یکنواخت بدین‌صورت نوشته می‌شود:

$$H = J \sum_{n=1}^N S_n^z S_{n+1}^z + \sum_{n=1}^N \vec{D} \cdot (\vec{S}_n \times \vec{S}_{n+1}) - h \sum_{n=1}^N S_n^z \quad (1)$$

که در این رابطه، J برهمکنش تبدالی پادفرومغناطیس، \vec{D} قدرت برهمکنش ژایالوشینسکی-موریا، h معرف میدان مغناطیسی یکنواخت و \vec{S}_n عمل‌گر اسپین روی مکان n ام شبکه است. جمله دوم در هامیلتونی مذکور برهمکنش ژایالوشینسکی-موریا نامیده می‌شود. در دمای صفر مطلق و در غیاب میدان مغناطیسی، زنجیره آیزینگ نظم بلندبرد نیل در راستای محور z دارد. با اضافه شدن برهمکنش ژایالوشینسکی-موریا، افت و خیز کوانتومی در حالت پایه سیستم به‌وجود می‌آید. افت و خیزهای کوانتومی مذکور در $D_z = J$ نظم نیل را از بین برده و گذار فاز به سیال اسپینی روی می‌دهد.

از مبحث فیزیک آماری می‌دانیم که برای بررسی رفتار دمایی سیستم مذکور باید هامیلتونی سیستم قطری شود. برای این‌که نمایش قطری هامیلتونی تعیین شود در ابتدا یک دوران حول محور z بدین‌صورت اعمال می‌کنیم [۴]:

$$S_n^\pm \rightarrow S_n^\pm e^{\pm im \frac{\pi}{2}} \quad (2)$$

در اثر این دوران، هامیلتونی مذکور به هامیلتونی زنجیره XXZ در حضور میدان طولی تبدیل می‌شود:

$$H = D \sum_{n=1}^N S_n^x S_{n+1}^x + S_n^y S_{n+1}^y + \frac{J}{D} S_n^z S_{n+1}^z - h \sum_{n=1}^N S_n^z \quad (3)$$

حال با استفاده از تبدیلات جوردن-ویگنر:

$$\begin{aligned} S_n^z &= a_n^\dagger a_n - \frac{1}{2} \\ S_n^+ &= a_n^\dagger e^{i\pi \sum_{l<n} a_l^\dagger a_l} \\ S_n^- &= a_n e^{-i\pi \sum_{l<n} a_l^\dagger a_l} \end{aligned} \quad (4)$$

نمایش فرمیونی هامیلتونی (3) بدین صورت به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} H_f &= D \sum_n \left[\frac{1}{2} (a_n^\dagger a_{n+1} + a_{n+1}^\dagger a_n) + \Delta_{eff} a_n^\dagger a_n a_{n+1}^\dagger a_{n+1} \right] \\ &+ \sum_n (-D \Delta_{eff} - h) a_n^\dagger a_n + N \frac{D \Delta_{eff}}{\xi} + \frac{N h}{2} \end{aligned} \quad (5)$$

هامیلتونی مذکور معرف یک گاز فرمیونی برهمکنشی است که در واقع $\frac{J}{D}$ را برابر Δ_{eff} قرار داده‌ایم. لازم به

ذکر است که با استفاده از قضیه ویک سیستم برهمکنشی مذکور به یک گاز فرمیونی غیربرهمکنشی تبدیل می‌شود [15].

در ادامه با استفاده از تبدیلات فوریه:

$$\begin{aligned} a_n^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k e^{ikj} a_k^\dagger \\ a_n &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k e^{-ikj} a_k \end{aligned} \quad (6)$$

هامیلتونی میدان متوسط سیستم در فضای شبه‌تکانه در ناحیه اول بریلوئن بدین صورت به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} H_{MF} &= \sum_k a(k) a_k^\dagger a_k - i \sum_k b(k) (a_k^\dagger a_{-k}^\dagger + a_k a_{-k}) \\ &+ \frac{N h}{2} + \frac{N D \Delta_{eff}}{\xi} + N D \Delta_{eff} (\gamma_1^\dagger - \gamma_1^\dagger + \gamma_2^\dagger) \end{aligned} \quad (7)$$

که در رابطه بالا، $a(k)$ و $b(k)$ بدین صورت تعریف شده‌اند:

$$a(k) = (D - 2D \Delta_{eff} \gamma_1) \cos k + 2\gamma_1 \Delta_{eff} D - h - D \Delta_{eff} \quad (8)$$

$$b(k) = D \Delta_{eff} \gamma_r \sin k$$

و γ ها مقادیری متوسط روی حالت پایه‌اند:

$$\gamma_1 = \langle a_n^\dagger a_n \rangle, \quad (9)$$

$$\gamma_r = \langle a_n^\dagger a_{n+1} \rangle,$$

$$\gamma_r = \langle a_n^\dagger a_{n+1}^\dagger \rangle,$$

حال با استفاده از تبدیلات بوگولیوف [۱۶]:

$$\beta_k = x_k a_k + y_k a_{-k}^\dagger \quad (10)$$

$$\beta_{-k}^\dagger = x_{-k}^* a_{-k}^\dagger + y_{-k}^* a_k$$

نمایش قطری شده هامیلتونی بدین صورت تعیین می‌شود:

$$H_{MF} = \sum_k \varepsilon(k) \left[\beta_k^\dagger \beta_k - \frac{1}{2} \right] + N \varepsilon_0 \quad (11)$$

که در رابطه مذکور $\varepsilon(k)$ طیف انرژی سیستم و ε_0 مقدار ثابتی است:

$$\varepsilon(k) = \sqrt{a^*(k) + \varepsilon b^*(k)}$$

$$\varepsilon_0 = D \Delta_{eff} (\gamma_1 - \gamma_r + \gamma_r) - \frac{D \Delta_{eff}}{\varepsilon} + \gamma_1 \Delta_{eff} D \quad (12)$$

γ_1 که متوسط روی حالت پایه است با استفاده از روابط بازگشتی، بدین صورت تعریف می‌شود:

$$\gamma_1 = \langle a_n^\dagger a_n \rangle, \quad (13)$$

$$\gamma_r = \langle a_n^\dagger a_{n+1} \rangle,$$

$$\gamma_r = \langle a_n^\dagger a_{n+1}^\dagger \rangle,$$

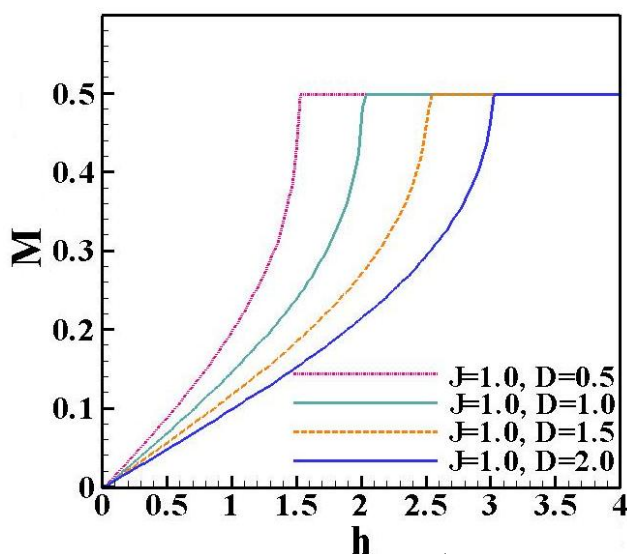
در نهایت مغناطش سیستم در این فرمول‌بندی فقط به γ_1 مرتبط می‌شود [۱۷]:

$$M = \left\langle \frac{1}{N} \sum_n S_n^z \right\rangle = \left\langle \frac{1}{N} \sum_n (a_n^\dagger a_n - \frac{1}{2}) \right\rangle = \gamma_1 - \frac{1}{2} \quad (14)$$

فرآیند مغناطش در دمای صفر مطلق

تأثیر یک میدان مغناطیسی خارجی بر روی سیستم باتابع مغناطش بررسی می‌شود. در دمای صفر مطلق، افت وخیزهای گرمایی در سیستم وجود نداشته و رفتار سیستم‌ها تحت تأثیر افت وخیزهای کوانتومی است. این

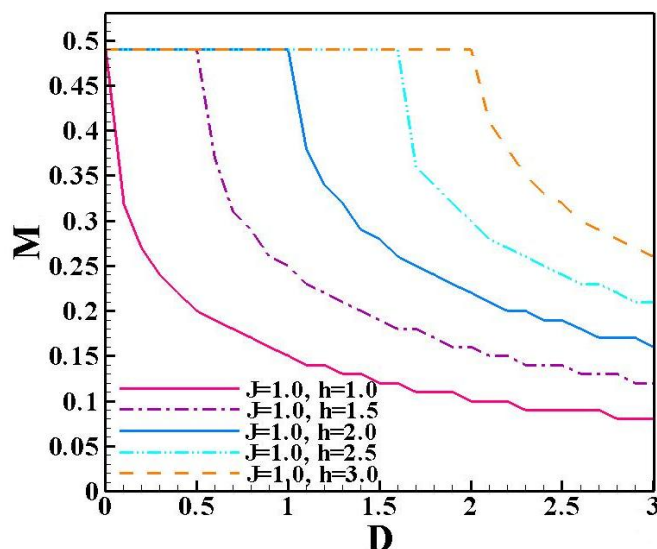
افت و خیزها ریشه در اصل عدم قطعیت هایزنبرگ دارند. به دلیل این که جمله برهمکنش ژایالوشینسکی-موریا در هامیلتونی با سایر جملات جابه‌جا نمی‌شود بنا بر این در دمای صفر مطلق افت و خیز کوانتومی در سیستم وجود دارد. برای به دست آوردن اطلاعاتی از فرآیند مغناطش سیستم، مقدار عددی پارامتر γ با حل معادله خودسازگار در میدان‌های مغناطیسی مختلف محاسبه شده است. محاسبات عددی مذکور برای محدوده وسیعی از مقادیر DM و برهمکنش تبدیلی انجام شده است. در شکل ۱، منحنی مغناطش بر حسب میدان مغناطیسی برای D ها و J های متفاوت رسم شده است. چنان‌که در شکل دیده می‌شود در غیاب میدان مغناطیسی و در دمای صفر مطلق مغناطش سیستم صفر است که در توافق کامل با بررسی‌های عددی لنگشوز و گروه باز بهنجارش است [۱۴]، [۱۵]. به محض اعمال میدان مغناطیسی، مغناطش سیستم شروع شده و افزایش می‌یابد که مشخصه سیستم‌های بدون گاف است. با افزایش بیشتر میدان مغناطیسی، مغناطش به مقدار اشباع خود در میدان بحرانی کوانتومی می‌رسد. میدان بحرانی اشباع مذکور با افزایش قدرت برهمکنش ژایالوشینسکی-موریا افزایش می‌یابد. در واقع برهمکنش آیزینگ در سیستم مذکور سعی در ایجاد نظم در راستای محور z دارد. اما از طرفی برهمکنش ژایالوشینسکی-موریا در صورتی که اسپین‌ها در صفحه xy قرار داشته باشند انرژی سیستم را کمینه می‌کند. این نشان می‌دهد که قدرت افت و خیزهای کوانتومی ایجاد شده با برهمکنش ژایالوشینسکی-موریا زیاد می‌شود و برای غلبه بر افت و خیزهای کوانتومی مذکور احتیاج به میدان‌های مغناطیسی بزرگتری داریم.



شکل ۱. منحنی مغناطش بر حسب میدان به ازای D ها و J های متفاوت

برای تکمیل بررسی فرآیند مغناطش، در شکل ۲ منحنی مغناطش بر حسب D و به ازای مقادیر مختلفی از میدان مغناطیسی رسم شده است. چنان‌که در این شکل دیده می‌شود در غیاب برهمکنش ژایالوشینسکی-موریا، مغناطش سیستم اشباع است که مشخصه مدل آیزینگ در میدان مغناطیسی است. در میدان کوچکتر از میدان بحرانی کوانتومی به محض اضافه شدن برهمکنش ژایالوشینسکی-موریا مغناطش شروع به کاهش می‌کند که در توافق کامل با سیستم بدون گاف انرژی است. نهایتاً با افزایش بیشتر برهمکنش ژایالوشینسکی-موریا و برای

مقادیر بزرگ D مغناطش تقریباً صفر می‌شود. اما برای میدان‌های بزرگتر از میدان بحرانی کوانتومی، مغناطش سیستم در حضور D و برای مقادیر کم متناهی باقی می‌ماند که مشخصه سیستم‌های دارای گاف انرژی است. نهایتاً در یک مقدار بحرانی از D مغناطش سیستم شروع به کاهش کرده و برای D های به اندازه کافی بزرگ صفر خواهد شد.



شکل ۲. منحنی مغناطش بر حسب D به ازای h ها و J های متفاوت

محاسبه گرمای ویژه

با استفاده از روش فرمیونیزه کردن طیف انرژی سیستم تعیین شده و سپس با محاسبه تابع پارش، انرژی آزاد

به شکل زیر به دست می‌آید:

$$F = -\frac{1}{\beta} \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{N} \ln S_p \exp(-\beta H) \right] \quad (22)$$

$$F = -\frac{1}{2\pi\beta} \int_{-\pi}^{\pi} dk \ln \left[2 \cosh \frac{\beta \varepsilon(k)}{2} \right] + \varepsilon_0$$

در رابطه بالا s_p جمع روی تمام حالت‌ها است. از طرفی $\beta = \frac{1}{kT}$ و k ثابت بولتزمن و برابر یک است و T

کمیتی بدون بعد است. با مشخص شدن انرژی آزاد سیستم، آنتروپی و گرمای ویژه به‌سادگی با مشتق‌گیری به‌دست می‌آیند.

$$S = \beta \frac{\partial F}{\partial \beta} \quad (23)$$

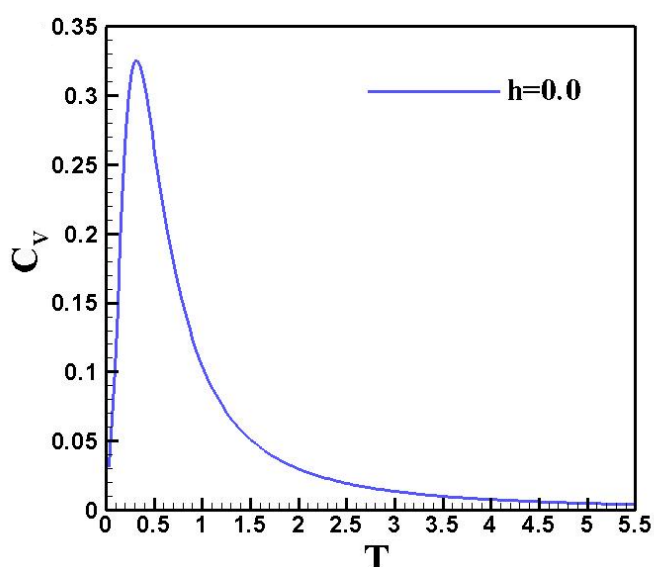
$$S = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk \frac{1}{\beta} \ln \left[2 \cosh \frac{\beta \varepsilon(k)}{2} \right] - \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk \beta \varepsilon \operatorname{tgh} \frac{\beta \varepsilon(k)}{2}$$

$$C_v = -\beta \frac{\partial S}{\partial \beta} \quad (24)$$

$$C_v = \frac{1}{\Lambda \pi T} \int_{-\pi}^{\pi} dk \varepsilon(k) \frac{1}{\cosh \beta \varepsilon(k)}$$

تحلیل گرمای ویژه

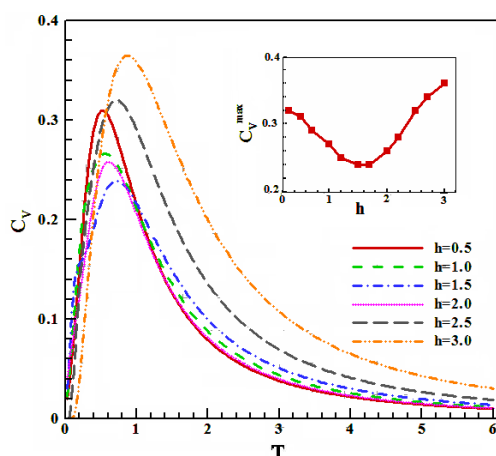
قبل از بررسی اثر توأمان میدان مغناطیسی و برهمکنش ژایالوشینسکی-موریا ابتدا گرمای ویژه مدل ژایالوشینسکی-موریا از رابطه (۲۴) محاسبه شده و رفتار دمایی آن در شکل ۳، نشان داده می‌شود.



شکل ۳. منحنی گرمای ویژه بر حسب دما برای $J = 0$ و $D = 1$

چنان‌که در شکل دیده می‌شود بدون گاف بودن این مدل به‌ازای میدان کمتر از میدان بحرانی ($h < h_c = 1$) بیان‌گر این مطلب است که با افزایش دما گرمای ویژه سیستم نیز افزایش می‌یابد. سپس با افزایش بیش‌تر دما گرمای ویژه پس از عبور از یک بیشینه کاهش یافته تا در نهایت در دماهای به اندازه کافی بزرگ، صفر می‌شود. پیک شاتکی گونه مذکور مشخصه سیستم‌های مغناطیسی کم-بعد است.

در شکل ۴، محاسبات را برای حالت‌های ترکیبی از تمامی برهمکنش‌های مدل تکمیل کرده و گرمای ویژه سیستم را برای $J = 1$ و $D = 1$ و میدان‌های مغناطیسی متفاوت رسم می‌کنیم.



شکل ۴. منحنی گرمای ویژه بر حسب دما برای $h = 0/5, 1, 1/5, 2, 2/5, 3$ و $J=1$ و $D=1$ نمودار داخلی، منحنی بیشینه مقدار گرمای ویژه بر حسب $h = 0/3, 0/5, 0/7, 1, 1/2, 1/5, 1/7, 2/2, 2/5, 2/7, 3$ برای $J=1$ و $D=1$ چنان‌که پیش از این نیز به آن اشاره کردیم به‌ازای میدان‌های کمتر از میدان بحرانی کوانتومی سیستم بدون گاف است و به‌ازای میدان‌های بیشتر از میدان بحرانی کوانتومی سیستم دارای گاف است که با افزایش میدان این گاف بزرگتر می‌شود. چنان‌که در شکل ۴ نیز دیده می‌شود. برای میدان‌های کمتر از h_c با افزایش دما، گرما به‌وسیله سیستم جذب شده و گرمای ویژه نیز افزایش می‌یابد. و برای میدان‌های بزرگتر از میدان بحرانی به‌دلیل وجود گاف انرژی در سیستم، گرمایی توسط سیستم جذب نشده و در منحنی گرمای ویژه یک سکوی صفر در دماهای خیلی کم و نزدیک به صفر نشان داده می‌شود. به‌علاوه، بیشینه مقدار گرمای ویژه با افزایش میدان رفتار دوگانه‌ای نشان می‌دهد. چنان‌که در قسمت داخلی شکل ۴ نشان داده شده است برای میدان‌های کوچکتر از میدان بحرانی کوانتومی، بیشینه مذکور با افزایش میدان کاهش می‌یابد اما در میدان‌های بزرگتر از میدان بحرانی کوانتومی افزایش می‌یابد.

نتیجه‌گیری

در این مقاله مدل زنجیره آیزینگ اسپین- $1/2$ در حضور میدان مغناطیسی طولی و برهمکنش ژایالوشینسکی-موریا در نظر گرفته شد. با روش فرمیونیزه کردن طیف انرژی سیستم به‌طور کامل تعیین شد و فرآیند مغناطش و گرمای ویژه بررسی شد.

نتایج نشان می‌دهند که در غیاب میدان مغناطیسی و در دمای صفر مطلق مغناطش سیستم صفر است که در توافق کامل با بررسی‌های عددی لنگشوز و گروه بازبه‌هنجارش است [۱۴]، [۱۵]. به‌محض اعمال میدان مغناطیسی، مغناطش سیستم شروع شده و افزایش می‌یابد که مشخصه سیستم‌های بدون گاف است. اصولاً اگر در طیف انرژی سیستمی گاف وجود داشته باشد، سیستم مذکور در صورتی به عامل خارجی پاسخ می‌دهد که عامل خارجی بر گاف انرژی غلبه کند. با افزایش بیشتر میدان مغناطیسی، در نهایت مغناطش به مقدار اشباع خود در میدان بحرانی کوانتومی می‌رسد. میدان بحرانی اشباع مذکور با افزایش قدرت برهمکنش ژایالوشینسکی-موریا

افزایش می‌یابد. همچنین در غیاب برهمکنش ژایالوشینسکی-موریا، مغناطش سیستم اشباع است که مشخصه مدل آیزینگ در میدان مغناطیسی است. در میدان کوچکتر از میدان بحرانی کوانتومی به محض اضافه شدن برهمکنش ژایالوشینسکی-موریا مغناطش شروع به کاهش می‌کند که در توافق کامل با سیستم بدون گاف انرژی است. نهایتاً با افزایش بیشتر برهمکنش ژایالوشینسکی-موریا و برای مقادیر بزرگ D مغناطش تقریباً صفر می‌شود. اما برای میدان‌های بزرگتر از میدان بحرانی کوانتومی، مغناطش سیستم در حضور D و برای مقادیر کم متناهی باقی می‌ماند که مشخصه سیستم‌های دارای گاف انرژی است. نهایتاً در یک مقدار بحرانی از D مغناطش سیستم شروع به کاهش کرده و برای D های به اندازه کافی بزرگ صفر خواهد شد.

پژوهش‌های اخیر روی سیستم مذکور نشان داده‌اند که سیستم مذکور در دمای صفر مطلق و به ازای میدان‌های کمتر از میدان بحرانی بدون گاف انرژی است و در فاز سیال لایتینجر قرار دارد [۱۴]، [۱۵]. در میدان‌های بیشتر از میدان بحرانی، گاف انرژی در طیف سیستم ایجاد شده و سیستم به فاز فرومغناطیس اشباع می‌رود. بررسی ما نشان می‌دهد که منحنی گرمای ویژه نیز اطلاعاتی دارد که مربوط به گاف انرژی و قدرت برهمکنش‌ها است. علاوه بر آن مشخص شد با افزایش میدان، بیشینه مقدار گرمای ویژه برای میدان‌های کوچکتر از میدان بحرانی کوانتومی کاهش می‌یابد در صورتی که برای میدان‌های بزرگتر از میدان بحرانی کوانتومی با افزایش میدان، بیشینه مقدار گرمای ویژه افزایش می‌یابد.

منابع

1. H. J. Mikeska, A. K. Kolezhuk, "One-Dimensional Magnetism", Lect. Notes Phys. 645 (2004).
2. I. Dzyaloshinskii, *J. Phys. Chem Solids* 4, 241 (1958).
3. T. Moriya, *Phys. Rev.* 120, 91 (1960).
4. I. Affleck, M. Oshikawa, *Phys. Rev. B* 60, 1038 (1999).
5. M. Oshikawa, I. Affleck, *Phys. Rev. Lett.* 82, 5136 (1999).
6. M. Oshikawa, I. Affleck, *Phys. Rev. B* 65, 134410 (2002).
7. J. Sudan, A. Luscher, A. M. Lauchli, *Phys. Rev. B* 80, 140402(R) (2009).
8. S. Seki, Y. Yamasaki, M. Soda, M. Matsuura, K. Hirota, Y. Tokura, *Phys. Rev. Lett.* 100, 127201 (2008).
9. D. Huvonen, U. Nagel, T. Room, Y. J. Choi, C. L. Zhang, S. Park, S. W. Cheong, *Phys. Rev. B* 80, 100402(R) (2009).
10. O. Derzhko, T. Verkholyak, T. Krokhmal'skii, H. Buttner, *Phys. Rev. B* 73, 214407 (2006).
11. M. Kargarian, R. Jafari, A. Langari, *Phys. Rev. A* 79, 042319 (2009).

12. R. Jafari, M. Kargarian, A. Langari, M. Siahatgar, *Phys. Rev. B* 81, 054413 (2008).
13. M. R. Soltani, S. Mahdavifar, A. Akbari, A. A. Masoudi, *J. Supercond. Nov. Magn.* 23, 1369 (2010).
14. J. Vahedi, M. R. Soltani, S. Mahdavifar, *J. Supercond. Nov. Magn.* 25, 1159 (2012).
15. G. C. Wick, "The evaluation of the Collision Matrix", *J. Phys. Rev.* 80, 268 (1950).
16. N. Bogoliubov, "On the theory of Superfluidity", *J. Phys.* 11, 23 (1947).
17. D. V. Dmitriev, V. Ya. Krivnov, A. A. Ovchinnikov, *Phys. Rev. B* 65, 172409 (2002).